54. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie A

1. Je-li součin kladných reálných čísel a, b, c roven 1, platí nerovnost

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geqq \frac{3}{4}.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

2. V oboru celých čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x(y+z+1) &= y^2+z^2-5, \\ y(z+x+1) &= z^2+x^2-5, \\ z(x+y+1) &= x^2+y^2-5. \end{aligned}$$

3. V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník KLM se základnou KL. Uvažujme libovolné dvě kružnice k a l, které mají vnější dotyk a které se dotýkají přímek KM a LM po řadě v bodech K a L. Určete množinu dotykových bodů T všech takových kružnic k a l.

4. Najděte všechny dvojice přirozených čísel, jejichž součet má poslední číslici 3, rozdíl je prvočíslo a součin je druhou mocninou přirozeného čísla.

II. kolo kategorie A se koná

v úterý 18. ledna 2005

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Po vynásobení kladným číslem $4(a+1)(b+1)(c+1)$ postupnými ekvivalentními úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}4a(c+1)+4b(a+1)+4c(b+1) &\geqq 3(a+1)(b+1)(c+1),\\ 4(ac+c)+4(ab+b)+4(bc+c) &\geqq 3(ab+a+b+1)(c+1),\\ 4(ab+ac+bc+a+b+c) &\geqq 3(abc+ab+ac+bc+a+b+c+1),\\ ab+ac+bc+a+b+c &\geqq 3(abc+1).\end{aligned}$$

Protože $abc=1$, dostaneme po dosazení do pravé strany poslední nerovnosti nerovnost

$$ab+ac+bc+a+b+c \geqq 6. \tag{1}$$

Dosadíme-li ještě do levé strany $ab=\dfrac{1}{c}$, $ac=\dfrac{1}{b}$ a $bc=\dfrac{1}{a}$, dostaneme nerovnost

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\geqq 6,$$

která platí, neboť hodnota každé závorky v levé straně je alespoň 2. Pro každé $t>0$ je totiž splněna nerovnost $t+t^{-1}\geqq 2$, v níž nastane rovnost, právě když $t=1$. (Tento známý fakt lze zdůvodnit např. úpravou nerovnosti $\left(\sqrt{t}-\sqrt{t^{-1}}\right)^2\geqq 0$, nebo se lze odvolat na nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou navzájem převrácených čísel.) Zároveň vidíme, že rovnost v nerovnosti (1), a tedy i v nerovnosti z textu úlohy nastane, právě když platí $a=b=c=1$. Tím je řešení celé úlohy ukončeno.

Dodejme, že za předpokladu $abc=1$ nerovnost (1) plyne přímo z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem šestice čísel ab, ac, bc, a, b, c:

$$\frac{ab+ac+bc+a+b+c}{6}\geqq\sqrt[6]{ab\cdot ac\cdot bc\cdot a\cdot b\cdot c}=\sqrt{abc}=1.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jestliže řešitel získá ekvivalentní nerovnost (1) nebo eliminuje jednu z proměnných a, b, c, avšak dalšího pokroku nedosáhne, udělte nejvýše 2 body. Pokud podmínka rovnosti $a=b=c=1$ v řešení chybí nebo není zdůvodněna, udělte nejvýše 5 bodů. Za poznatek o rovnosti v případě $a=b=c=1$ udělte 1 bod jen v případě, že řešitel nezíská žádné jiné dílčí body. Známou nerovnost $t+t^{-1}\geqq 2$ je možné použít, aniž je v řešení dokázána.

2. Odečteme-li od první rovnice rovnici druhou, dostaneme postupnými úpravami:

$$\begin{aligned}(xy+xz+x)-(yz+xy+y) &= (y^2+z^2-5)-(z^2+x^2-5),\\ (x-y)z+x-y &= (y-x)(y+x),\\ (x-y)(x+y+z+1) &= 0.\end{aligned}$$

Analogicky odvodíme rovnosti

$$(y-z)(x+y+z+1)=0 \quad \text{a} \quad (x-z)(x+y+z+1)=0. \tag{1}$$

Ve všech třech odvozených rovnicích vystupuje činitel $x + y + z + 1$. Rozlišíme proto, zda je roven nule, či nikoliv.

A. Nechť $x + y + z + 1 = 0$. Pak můžeme původní soustavu rovnic zapsat takto:

$$x \cdot (-x) = y^2 + z^2 - 5, \quad y \cdot (-y) = z^2 + x^2 - 5, \quad z \cdot (-z) = x^2 + y^2 - 5.$$

Vidíme, že celá soustava je ekvivalentní s jedinou rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, která (vzhledem k nezápornosti druhých mocnin) má v oboru celých čísel pouze taková řešení, že trojice (x^2, y^2, z^2) je (až na pořadí) trojice $(4, 1, 0)$, takže (x, y, z) je permutace některé z trojic $(\pm 2, \pm 1, 0)$. Znaménka čísel x, y, z snadno určíme z podmínky $x + y + z + 1 = 0$: vyhovuje jedině trojice $(-2, 1, 0)$ a libovolná její permutace. V případě A tedy dostáváme právě šest řešení dané soustavy.

B. Nechť $x + y + z + 1 \neq 0$. Pak z rovnic odvozených v úvodu řešení vyplývá, že platí $x = y = z$. Tehdy rovnice dané soustavy splývají v jedinou rovnici $x(2x + 1) = 2x^2 - 5$, které vyhovuje pouze $x = -5$. V případě B tedy máme jediné řešení $x = y = z = -5$.

Dodejme, že v první části řešení jsme mohli rovněž původní soustavu rovnic upravit do tvaru

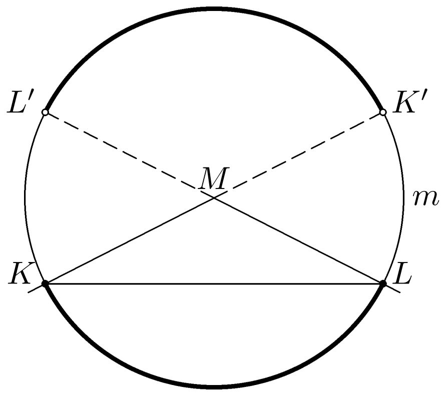
$$x^2 + y^2 + z^2 - 5 = x(x + y + z + 1) = y(x + y + z + 1) = z(x + y + z + 1). \qquad (2)$$

Odtud opět dostáváme, že platí buď $x + y + z + 1 = 0$, nebo $x = y = z$.

Odpověď: Soustava má sedm řešení: trojici $(-5, -5, -5)$, trojici $(-2, 1, 0)$ a její libovolnou permutaci.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel původní rovnice vhodně odečte, avšak nedokáže výsledek rozložit do součinového tvaru (1), udělte 1 bod, za nalezení rozkladů (1) nebo soustavy (2) udělte 3 body, další body přidejte podle úplnosti následné diskuse. Zřejmý poznatek o řešení rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ v oboru celých čísel, jakož i následné určení znamének v rovnosti $\pm 2 \pm 1 + 0 + 1 = 0$ mohou být uvedena bez vysvětlení.

3. Ukážeme, že hledanou množinu tvoří body K a L a dále vnitřní body oblouku KL kružnice $m(M, |MK|)$ a oblouku $K'L'$ středově souměrně sdruženého s obloukem KL podle středu M (obr. 1).

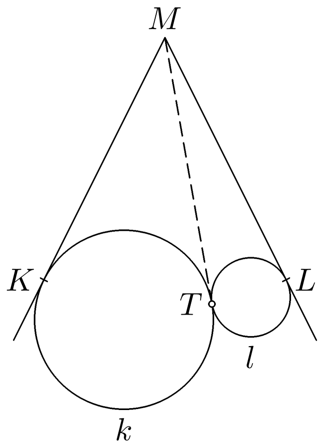


Obr. 1

Dokažme nejdříve, že přímka MT (obr. 2) je (vnitřní) společnou tečnou kružnic k a l. Připusťme, že přímka MT protne kružnici k v bodech T, T_1 a kružnici l v bodech T, T_2. Pro mocnosti bodu M (je to bod tečny, proto leží ve vnější oblasti každé z obou kružnic k a l) k oběma kružnicím platí

$$|MT| \cdot |MT_1| = |MK|^2 = |ML|^2 = |MT| \cdot |MT_2|,$$

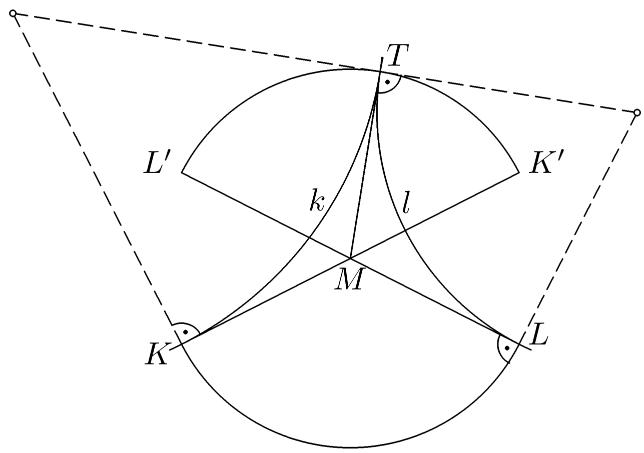
odkud $|MT_1| = |MT_2|$. Protože oba body T_1, T_2 leží na téže polopřímce MT, plyne odtud $T_1 = T_2$. Obě kružnice k a l však mají společný jediný bod, takže $T_1 = T_2 = T$. Proto je MT společná tečna obou kružnic a navíc $|MT| = |MK| = |ML|$, bod T tedy leží na kružnici $m(M, |MK|)$.



Obr. 2

Protože přímka MT obě kružnice odděluje, neleží body K a L uvnitř téže poloroviny určené přímkou MT, přímka MT protíná stranu KL trojúhelníku KLM, a proto bod T leží na jednom z kratších oblouků KL, $K'L'$ kružnice m.

Je-li naopak T libovolný vnitřní bod jednoho z těchto oblouků (obr. 3), leží sousední konvexní úhly KMT a LMT na opačných stranách společného ramene MT. Z rovností $|MK| = |MT|$ a $|ML| = |MT|$ pak plyne, že do zmíněných úhlů lze vepsat kružnice tak, aby se dotkly ramen příslušného úhlu v bodech K a T, resp. L a T. To jsou vyhovující kružnice k, l s dotykovým bodem T.



Obr. 3

Je-li $T = K$, vyhovuje libovolná kružnice k dotýkající se přímky MK v bodě K a ležící v polorovině MKL' a kružnice l dotýkající se ramen úhlu KML v bodech K a L (ta je určena jednoznačně). Analogicky sestrojíme vyhovující kružnice k a l pro bod $T = L$.

Bod K' ani bod L' do hledané množiny patřit nemohou, protože K' leží na tečně KM k libovolné z kružnic k a analogicky bod L' leží na tečně LM k libovolné z kružnic l.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel dokáže, že bod T leží na zmíněných obloucích, avšak neověří, že naopak každý jejich bod je bodem dotyku některé vyhovující dvojice kružnic, strhněte 2 body. Pokud řešitel přehlédne existenci bodů T na oblouku $K'L'$, strhněte rovněž 2 body. Pokud řešitel opomene aspoň jednu z možností $T = K$, $T = L$, strhněte 1 bod.

4. Označme x a y hledaná čísla, přičemž $x > y$. Protože $p = x - y$ je prvočíslo a pro největší společný dělitel d čísel x a y platí $d \mid (x-y)$ neboli $d \mid p$, je buď $d = p$, nebo $d = 1$.

Kdyby platilo $d = p$, měli bychom $y = kp$ a $x = y + p = (k+1)p$ pro vhodné přirozené k, takže součin xy by se rovnal číslu $k(k+1)p^2$. To ale není druhá mocnina přirozeného čísla (dále stručněji „čtverec“) pro žádné k, neboť číslo $k(k+1)$ není nikdy čtverec.[1] Musí proto být $d = 1$, takže čísla x a y jsou nesoudělná. Jejich součin xy je pak čtverec jedině v případě, kdy oba činitelé jsou čtverce, tedy $x = u^2$ a $y = v^2$ pro vhodná $u, v \in \mathbb{N}$, $u > v$, odkud $p = x - y = (u-v)(u+v)$. Takový rozklad prvočísla p na součin má jediné možné činitele $u - v = 1$ a $u + v = p$. Odtud snadno plynou rovnosti $u = \frac{1}{2}(p+1)$ a $v = \frac{1}{2}(p-1)$, z nichž pro součet $s = x + y$ získáme vyjádření

$$s = x + y = u^2 + v^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+1}{2}.$$

Dekadický zápis čísla s podle zadání končí číslicí 3, takže zápis čísla p^2+1 (rovného číslu $2s$) končí číslicí 6. Zápis čísla p^2 proto končí číslicí 5, je tedy násobkem pěti, což nastane jedině pro prvočíslo $p = 5$. Dosazením této hodnoty do odvozených vzorců dostaneme $u = 3$, $v = 2$, $x = 9$ a $y = 4$. Zkouška je triviální: $9 - 4 = 5$, $9 + 4 = 13$, $9 \cdot 4 = 6^2$.

Odpověď: Podmínkám úlohy vyhovuje jediná dvojice čísel 9 a 4.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za zdůvodnění, že hledaná čísla x a y jsou nesoudělná, udělte 2 body, 1 bod udělte za konstatování, že z nesoudělnosti čísel x, y plyne vyjádření $x = u^2$ a $y = v^2$, 1 bod za zdůvodnění vztahu $u - v = 1$ a konečně 2 body za diskusi o dělitelnosti číslem 5 vedoucí k určení hodnoty prvočísla $p = 5$. Nezíská-li řešitel žádné dílčí body za výše uvedené položky, avšak uhodne výsledek, udělte 1 bod. Zřejmý poznatek, že číslo $k(k+1)$ není čtverec, je možné užít bez důkazu. Pokud ale chybí jakákoli zmínka o nutnosti zkoušky, udělte nejvýše 5 bodů.

[1] Platí totiž $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2$, takže číslo $k(k+1)$ leží mezi dvěma sousedními čtverci. Jiné vysvětlení lze založit na tom, že čísla k, $k+1$ jsou navzájem nesoudělná, takže by obě musela být čtverci, lišícími se o 1. Takové čtverce však neexistují.