54. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie B

1. Kružnice k_1 o poloměru 1 má vnější dotyk s kružnicí k_2 o poloměru 2. Každá z kružnic k_1, k_2 má vnitřní dotyk s kružnicí k_3 o poloměru 3. Vypočítejte poloměr kružnice k, která má s kružnicemi k_1, k_2 vnější dotyk a s kružnicí k_3 vnitřní dotyk.

2. Na jedné internetové stránce probíhá hlasování o nejlepšího hokejistu světa posledního desetiletí. Počet hlasů pro jednotlivé hráče je uváděn po zaokrouhlení v celých procentech. Po Mirkově hlasování pro Jaromíra Jágra se jeho zisk 7 % nezměnil. Kolik nejméně lidí včetně Mirka hlasovalo? Předpokládáme, že každý účastník ankety hlasoval právě jednou, a to pro jediného hráče.

3. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K a L paty výšek z vrcholů A a B, M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC.

4. Najděte všechny trojice reálných čísel x, y, z, pro které platí

$$\lfloor x\rfloor - y = 2\cdot\lfloor y\rfloor - z = 3\cdot\lfloor z\rfloor - x = \frac{2004}{2005},$$

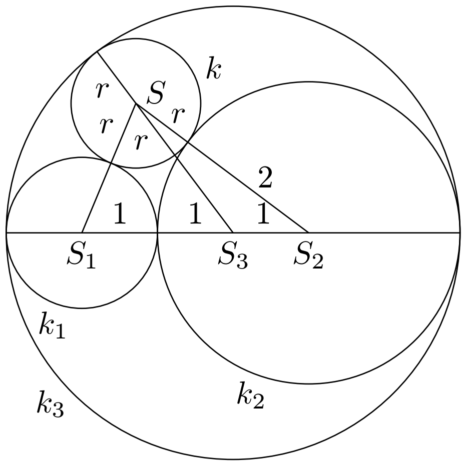
kde $\lfloor a\rfloor$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo a.

II. kolo kategorie B se koná

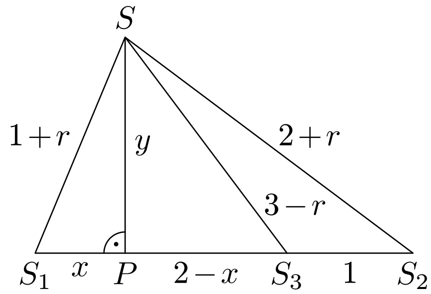
v úterý 22. března 2005

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Protože se součet průměrů kružnic k_1 a k_2 rovná průměru kružnice k_3, leží jejich středy S_1, S_2 a S_3 v přímce. Existují dvě shodné kružnice, které splňují podmínky úlohy, a jsou souměrně sdružené podle přímky S_1S_2. Označme k jednu z nich (obr. 1), S její střed a r odpovídající poloměr.



Obr. 1



Obr. 2

Pro velikosti stran trojúhelníku S_1S_2S platí: $|S_1S| = 1 + r$, $|S_2S| = 2 + r$, $|S_1S_2| = 3$ a $|S_3S| = 3 - r$ Pro bod S_3 zároveň platí, že $|S_3S_1| = 2$ a $|S_3S_2| = 1$. Označíme-li P pravoúhlý průmět bodu S na přímku S_1S_2 (obr. 2) a $x = |S_1P|$, $y = |SP|$, můžeme podle Pythagorovy věty psát

$$(1 + r)^2 = x^2 + y^2,$$
$$(2 + r)^2 = (3 - x)^2 + y^2,$$
$$(3 - r)^2 = (2 - x)^2 + y^2.$$

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme $3+2r = 9-6x$ neboli $2r = 6-6x$, odečtením první od třetí $8 - 8r = 4 - 4x$ neboli $2r = 1 + x$. Porovnáním obou důsledků vyjde rovnice $6 - 6x = 1 + x$, odkud $x = \frac{5}{7}$, $r = 3 - 3x = \frac{6}{7}$.

Poznámka. Se znalostí kosinové věty se obejdeme bez pomocného bodu P: stačí napsat kosinové věty pro trojúhelníky S_1S_3S a S_1S_2S. Dostaneme tak dvě rovnice

$$(3 - r)^2 = 4 + (1 + r)^2 - 2 \cdot 2(1 + r) \cos \omega,$$
$$(2 + r)^2 = 9 + (1 + r)^2 - 2 \cdot 3(1 + r) \cos \omega,$$

kde $\omega = |\sphericalangle S_2S_1S|$. Po úpravě a vyjádření $(1 + r) \cos \omega$ z obou rovnic dostaneme pro r rovnici $2r - 1 = 1 - \frac{1}{3}r$, z níž plyne $r = \frac{6}{7}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za zjištění, že středy kružnic k_1, k_2, k_3 leží v přímce, dejte 1 bod, sestavení kvadratických rovnic pro hledaný poloměr r oceňte 3 body, 2 body dejte za výpočet poloměru r.

2. Označme p počet účastníků ankety včetně Mirka a j počet hlasů pro Jágra. Na celých $7\,\%$ se zaokrouhlí čísla z intervalu $\langle 6{,}5\,\%; 7{,}5\,\%)$ neboli $\langle 0{,}065; 0{,}075)$. Před Mirkovým hlasováním měl Jágr $j-1$ hlasů a po něm j hlasů. Musí proto platit

$$0{,}065 \leqq \frac{j-1}{p-1} < 0{,}075, \quad 0{,}065 \leqq \frac{j}{p} < 0{,}075.$$

Protože z nerovnosti $0 < j < p$ plyne $\dfrac{j-1}{p-1} < \dfrac{j}{p}$, stačí řešit dvě nerovnice

$$0{,}065 \leqq \frac{j-1}{p-1} \quad \text{a} \quad \frac{j}{p} < 0{,}075. \tag{1}$$

První z nich je ekvivalentní s nerovnicí $0{,}065p - 0{,}065 + 1 \leqq j$ a druhá s nerovnicí $j < 0{,}075p$, proto musí platit $0{,}065p + 0{,}935 < 0{,}075p$, odkud plyne $p > 93{,}5$. Protože p je celé číslo, dostáváme $p \geqq 94$. Musíme ovšem ještě zjistit, pro které nejmenší $p \geqq 94$ existuje celé číslo j, jež vyhovuje nerovnicím (1). Z podmínky $p \geqq 94$ dostaneme $j \geqq 0{,}065 \cdot 94 + {}+ 0{,}935 = 7{,}045$, a tudíž $j \geqq 8$. Z nerovnice $j < 0{,}075p$ pak máme $p > \frac{320}{3}$, neboli $p \geqq 107$. Protože $0{,}065 \cdot 107 + 0{,}935 < 8$, je dvojice $j = 8$, $p = 107$ řešením soustavy (1), takže $p = 107$ je nejmenší možný počet lidí, kteří v anketě hlasovali.

Jiné řešení. Nerovnice $0{,}065p + 0{,}935 \leqq j < 0{,}075p$, ekvivalentní nerovnicím (1), upravíme na tvar

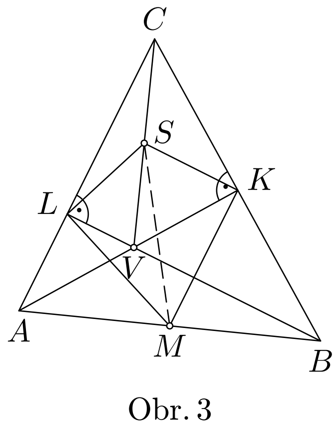
$$\frac{j}{0{,}075} < p \leqq \frac{j - 0{,}935}{0{,}065},$$

což dává podmínku $0{,}065j < 0{,}075j - 0{,}075 \cdot 0{,}935$, neboli $j > 7{,}5 \cdot 0{,}935 > 7$, takže $j \geqq 8$. Z nerovnosti $p > j/0{,}075$ tak dostáváme nerovnost $p \geqq 107$. Nyní stačí ověřit, že $p = 107$ vyhovuje pro $j = 8$ i druhé podmínce, tj. že platí $107 \leqq \dfrac{8 - 0{,}935}{0{,}065}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odvození soustavy dvou nerovnic analogické soustavě (1) dejte 2 body, za postupné odvození odhadů pro celá čísla p a j dejte 3 body, za ověření, že $p = 107$ je hledané nejmenší p, dejte 1 bod.

3. Označme S střed úsečky CV (obr. 3). Body K a L leží na Thaletově kružnici s průměrem AB, takže $|ML| = |MK|$. Body K a L zároveň leží i na Thaletově kružnici s průměrem CV, takže $|SL| = |SK|$. Trojúhelníky SLM a SKM jsou tudíž shodné (sss), takže $|\sphericalangle SML| = |\sphericalangle SMK|$, neboli osa úhlu LMK prochází středem S úsečky VC.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Po dvou bodech oceňte odvození každé z rovností $|ML| = |MK|$ a $|SL| = |SK|$, zbylé dva body dejte za dokončení důkazu (argumentovat lze např. také tím, že oba trojúhelníky LKM a LKS jsou rovnoramenné [a $LMKS$ je deltoid]).



Obr. 3

4. Danou soustavu rovnic přepíšeme ekvivalentně do tvaru

$$\begin{aligned} y &= \lfloor x \rfloor - \alpha, \\ z &= 2\lfloor y \rfloor - \alpha, \\ x &= 3\lfloor z \rfloor - \alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

kde jsme jako α označili číslo $\frac{2004}{2005}$ z intervalu $(0,1)$. Ze soustavy (1) plynou postupně rovnosti

$$\begin{aligned} \lfloor y \rfloor &= \lfloor x \rfloor - 1, \\ \lfloor z \rfloor &= 2\lfloor y \rfloor - 1 = 2\lfloor x \rfloor - 3, \\ \lfloor x \rfloor &= 3\lfloor z \rfloor - 1 = 6\lfloor x \rfloor - 10. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice dostáváme $\lfloor x \rfloor = 2$ a ze zbylých dvou rovnic dále dopočítáme $\lfloor y \rfloor = \lfloor z \rfloor = 1$. Dosazením do (1) tak máme $x = 3 - \frac{2004}{2005} = 2 + \frac{1}{2005}$, $y = 2 - \frac{2004}{2005} = 1 + \frac{1}{2005}$ a $z = 2 - \frac{2004}{2005} = 1 + \frac{1}{2005}$. Vyšla necelá čísla x, y a z, která mají právě takové celé části, jaké jsme dosazovali do pravých stran rovností (1). Tak jsme zároveň provedli zkoušku (kterou lze ovšem provést i přímým dosazením do původní soustavy). Uvedená trojice je (jediným) řešením dané úlohy.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za odvození vztahu pro jednu celou část. Dokončení výpočtu oceňte 2 body, za chybějící zmínku o zkoušce 1 bod strhněte.