54. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie C

1. Určete číslice x, y, z tak, aby platila rovnost

$$\frac{x+y}{z} = \overline{z{,}yx},$$

kde $\overline{z{,}yx}$ značí číslo složené ze z jednotek, y desetin a x setin.

2. Ke každému přirozenému číslu $n > 2$ najděte aspoň jednu dvojici různých přirozených čísel p, q tak, aby číslo $\frac{1}{n}$ bylo aritmetickým průměrem čísel $\frac{1}{p}$ a $\frac{1}{q}$.

3. Libovolným vnitřním bodem P úhlopříčky AC daného obdélníku $ABCD$ jsou vedeny rovnoběžky s jeho stranami, které protínají úsečky AB, BC, CD a DA po řadě v bodech K, L, M a N. Dokažte, že

a) přímky LM a KN jsou rovnoběžky,

b) vzdálenost rovnoběžek LM a KN je konstantní (nezávisí na volbě bodu P),

c) pro obvod o čtyřúhelníku $KLMN$ platí nerovnost $o \geqq 2|AC|$.

4. Popište konstrukci lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD, kterému je možno opsat kružnici s poloměrem $r = 5\,\mathrm{cm}$, je-li dána vzdálenost $d = 2\,\mathrm{cm}$ jejího středu od průsečíku úhlopříček a $|\sphericalangle BAC| = 70°$.

II. kolo kategorie C se koná

v úterý 22. března 2005

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Danou rovnost pro $z \neq 0$ postupně upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{z} &= \overline{z,yx}, \\ \frac{x+y}{z} &= z + \frac{y}{10} + \frac{x}{100}, \\ 100(x+y) &= (100z + 10y + x) \cdot z. \end{aligned}$$

Jelikož x, y, z jsou číslice, platí nerovnosti $100 \cdot (9+9) \geqq 100(x+y)$ a $(100z + 10y + x) \cdot z \geqq 100z \cdot z$, odkud plyne $18 \geqq z^2$. To znamená, že může být jedině $z = 1$, nebo $z = 2$, nebo $z = 3$, nebo $z = 4$ (hodnota $z = 0$ není přípustná).

Pro $z = 1$ má daná rovnost tvar

$$\begin{aligned} 100(x+y) &= 100 + 10y + x, \\ 99x + 90y &= 100. \end{aligned}$$

Úvahou o dělitelnosti třemi či devíti zjistíme, že poslední rovnice nemá žádné celočíselné řešení. Proto nemůže být $z = 1$.

Pro $z = 2$ má daná rovnost tvar

$$\begin{aligned} 100(x+y) &= (200 + 10y + x) \cdot 2, \\ 49x + 40y &= 200. \end{aligned}$$

Úvahou o dělitelnosti deseti zjistíme, že může být jedině $x = 0$. Pak je $y = 5$, takže v tomto případě splňují danou rovnost číslice $x = 0$, $y = 5$, $z = 2$.

Pro $z = 3$ má daná rovnost tvar

$$\begin{aligned} 100(x+y) &= (300 + 10y + x) \cdot 3, \\ 97x + 70y &= 900. \end{aligned}$$

Úvahou o dělitelnosti deseti zjistíme, že může být jedině $x = 0$. Pak ale neexistuje žádné celé y splňující rovnost $70y = 900$. Proto nemůže být $z = 3$.

Pro $z = 4$ má daná rovnost tvar

$$\begin{aligned} 100(x+y) &= (400 + 10y + x) \cdot 4, \\ 24x + 15y &= 400. \end{aligned}$$

Úvahou o dělitelnosti třemi zjistíme, že poslední rovnice nemá žádné celočíselné řešení. Proto nemůže být $z = 4$.

Daná rovnost je splněna jedině pro $x = 0$, $y = 5$, $z = 2$. Skutečně platí $\dfrac{0+5}{2} = 2{,}50$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud bude řešení provedeno uvedeným způsobem, pak za omezení $z < 5$ udělte 2 body, za vyřešení rovnice pro jednotlivé hodnoty $z \in \{1, 2, 3, 4\}$ udělte po jednom bodu.

2. K libovolně zvolenému přirozenému číslu $n > 2$ hledáme příklad různých přirozených čísel p, q závislých na čísle n tak, aby platilo

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\Big).$$

Po úpravách má tato rovnost tvar

$$2pq = n(p+q), \quad \text{neboli} \quad p(2q-n) = nq.$$

Jelikož stačí nalézt jedinou dvojici čísel p, q, je možné ji hledat zkoušením několika jednoduchých možností v poslední rovnici.

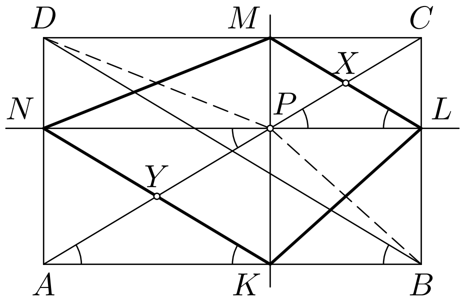
Zkusme položit $2q - n = 1$. Získáme tak $q = \frac{1}{2}(n+1)$ a $p = \frac{1}{2}n(n+1)$. Tato čísla jsou přirozená a vzájemně různá pro libovolné liché číslo $n > 2$.

Dále zkusme položit $2q - n = 2$. Získáme tak $q = \frac{1}{2}(n+2)$ a $p = \frac{1}{4}n(n+2)$. Tato čísla jsou přirozená a vzájemně různá pro libovolné sudé číslo $n > 2$.

Můžeme tedy pro liché číslo $n > 2$ položit $q = \frac{1}{2}(n+1)$ a $p = \frac{1}{2}n(n+1)$ a pro sudé číslo $n > 2$ zas $q = \frac{1}{2}(n+2)$ a $p = \frac{1}{4}n(n+2)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho za vytvoření rovnosti $p(2q-n) = nq$ nebo jiné vhodné rovnosti, která poslouží ke konstrukci čísel p a q, udělte 2 body.

3. a) AC a BD jsou úhlopříčky obdélníku $ABCD$, proto jsou úhly ABD a BAC shodné. AP a KN jsou úhlopříčky pravoúhelníku $AKPN$, proto jsou úhly AKN, KAP a APN shodné (obr. 1). PC a LM jsou úhlopříčky pravoúhelníku $PLCM$, proto jsou úhly PLM a LPC shodné. Úhly APN a LPC jsou shodné (vrcholové úhly), proto jsou shodné i úhly AKN, PLM a ABD, přímky LM a KN jsou tudíž rovnoběžné s úhlopříčkou BD daného obdélníku, a jsou tedy rovnoběžné navzájem.



Obr. 1

b) Jsou-li X a Y průsečíky přímek LM a KN s úhlopříčkou AC, je $|XY| = |XP| + |PY| = \frac{1}{2}|CP| + \frac{1}{2}|PA| = \frac{1}{2}(|CP| + |PA|) = \frac{1}{2}|CA|$. Úsečka XY má tedy délku nezávislou na poloze bodu P. Podle a) svírá přímka XY s přímkami KN a LM stejný úhel jako s přímkou BD, takže tento úhel rovněž nezávisí na poloze bodu P. Proto je i vzdálenost přímek LM a KN nezávislá na poloze bodu P (a je jednozačně určena velikostí $|XY|$ a úhlem MXP, přičemž $|\sphericalangle MXP| = 2|\sphericalangle ABD|$).

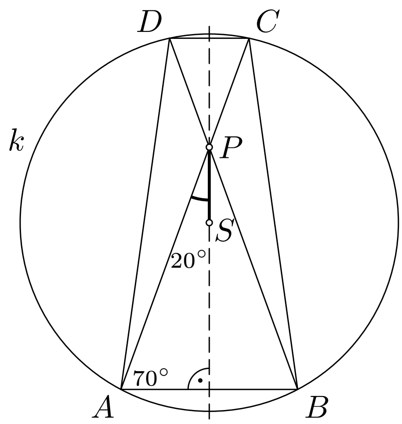
c) KL a BP jsou úhlopříčky pravoúhelníku $KBLP$, jsou proto shodné. Podobně jsou MN a PD shodné úhlopříčky pravoúhelníku $NPMD$, LM a PC shodné úhlopříčky pravoúhelníku $PLCM$ a NK a AP shodné úhlopříčky pravoúhelníku $AKPN$. Pro obvod čtyřúhelníku $KLMN$ tak platí

$$
\begin{aligned}
o = |KL| + |LM| + |MN| + |NK| = (|KL| + |MN|) + (|LM| + |NK|) = \\
= (|BP| + |PD|) + (|PC| + |AP|) \geqq |BD| + |AC| = 2|AC|,
\end{aligned}
$$

kde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost $|BP| + |PD| \geqq |BD|$ pro trojici bodů B, D, P.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za důkaz tvrzení a), 2 body za důkaz tvrzení b) a 2 body za důkaz tvrzení c).

4. Všimněme si lichoběžníku $ABCD$, jemuž lze opsat kružnici. Přímka jdoucí jejím středem S kolmo k oběma základnám AB a CD je osou souměrnosti obou tětiv AB a CD, tedy i osou souměrnosti celého lichoběžníku $ABCD$. Jeho ramena AD a BC jsou tudíž shodná a průsečík P úhlopříček AC a BD leží též na ose úseček AB a CD. Jelikož je podle zadání $|\sphericalangle BAC| = 70°$, je $|\sphericalangle APS| = 20°$ (obr. 2).



Obr. 2

Popis konstrukce: Sestrojíme úsečku SP, kde $|SP| = d = 2\,\mathrm{cm}$, a kružnici $k(S; 5\,\mathrm{cm})$. Bodem P vedeme polopřímky PX a PY tak, aby $|\sphericalangle SPX| = |\sphericalangle SPY| = 20°$. Průsečíky polopřímek PX a PY s kružnicí k jsou body A a B. Potom průsečíky vnitřků polopřímek AP a BP s kružnicí k jsou body C a D.

Úloha má jediné řešení.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za zdůvodnění toho, že body S a P leží na ose strany AB, 3 body za popis konstrukce a 1 bod za určení počtu řešení.