54. ročník matematické olympiády
III. kolo kategorie A

Benešov, 3.–6. dubna 2005

1. *Uvažujme libovolné aritmetické posloupnosti reálných čísel* $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ *a* $(y_i)_{i=1}^{\infty}$, *které mají stejný první člen a splňují pro některé* $k > 1$ *rovnosti*

$$x_{k-1}y_{k-1} = 42, \quad x_k y_k = 30 \quad \text{a} \quad x_{k+1}y_{k+1} = 16.$$

Najděte všechny takové posloupnosti, pro které je index k *největší možný.*

(J. Šimša)

Řešení. Označme c, resp. d diference hledaných posloupností, takže z vyjádření $x_i = x_1 + (i-1)c$ a $y_i = x_1 + (i-1)d$ pak dostaneme pro každé i rovnost

$$x_i y_i = x_1^2 + (i-1)x_1(c+d) + (i-1)^2 cd.$$

Budeme se tedy zabývat otázkou, kdy pro některý index $k > 1$ platí soustava rovnic

$$x_1^2 + (k-2)x_1(c+d) + (k-2)^2 cd = 42, \tag{1}$$
$$x_1^2 + (k-1)x_1(c+d) + (k-1)^2 cd = 30, \tag{2}$$
$$x_1^2 + kx_1(c+d) + k^2 cd = 16. \tag{3}$$

Odečteme-li od dvojnásobku rovnice (2) součet rovnic (1) a (3), dostaneme po úpravě rovnost $cd = -1$. Odečteme-li od rovnice (3) rovnici (2), obdržíme vztah

$$x_1(c+d) + (2k-1)cd = 14,$$

z něhož po dosazení hodnoty $cd = -1$ dojdeme k rovnosti

$$x_1(c+d) = 2k - 15. \tag{4}$$

Dosazením tohoto výsledku do rovnice (3) dostaneme vztah

$$x_1^2 + k(2k-15) - k^2 = 16,$$

ze kterého vyjádříme x_1^2 jako kvadratickou funkci indexu k:

$$x_1^2 = 16 - k(2k-15) + k^2 = 16 + 15k - k^2 = (k+1)(16-k).$$

Protože $x_1^2 \geqq 0$ a $k > 1$, plyne z posledního vzorce odhad $k \leqq 16$. V případě $k = 16$ ovšem vychází $x_1 = 0$ a rovnost (4) pak přejde do tvaru $0(c+d) = 2$, což není možné. Pro $k = 15$ dostaneme $x_1^2 = 16$, takže $x_1 = \pm 4$. Pro $x_1 = 4$ (a $k = 15$) z (4) plyne $c+d = \frac{15}{4}$, což spolu s rovností $cd = -1$ vede k závěru, že $\{c, d\} = \{4, -\frac{1}{4}\}$. To znamená, že obě posloupnosti jsou (až na pořadí) určeny vzorci:

$$x_i = 4 + (i-1)4 \quad \text{a} \quad y_i = 4 - \frac{i-1}{4} \quad \text{pro každé } i. \tag{5}$$

Pro takovou dvojici posloupností skutečně platí

$$x_{14}y_{14} = 56 \cdot \tfrac{3}{4} = 42, \quad x_{15}y_{15} = 60 \cdot \tfrac{1}{2} = 30 \quad \text{a} \quad x_{16}y_{16} = 64 \cdot \tfrac{1}{4} = 16.$$

Podobně pro druhou možnou hodnotu $x_1 = -4$ dostaneme posloupnosti, jejichž členy jsou opačné ke členům posloupností (5), tedy posloupnosti

$$x_i = -4 - (i-1)4 \quad \text{a} \quad y_i = -4 + \frac{i-1}{4} \quad \text{pro každé } i. \tag{6}$$

Odpověď. Největší hodnota indexu k je 15 a všechny vyhovující posloupnosti jsou (až na možnou záměnu pořadí ve dvojici) určeny vztahy (5) a (6).

2. *Zjistěte, pro která m existuje právě 2^{15} podmnožin X množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 47\}$ s vlastností: číslo m je nejmenší prvek množiny X a pro každé $x \in \mathsf{X}$ platí buď $x + m \in \mathsf{X}$, nebo $x + m > 47$.* *(R. Kučera)*

Řešení. Nejprve v závislosti na daném čísle m $(1 \leqq m \leqq 47)$ vyjádříme, kolik množin X popsané vlastnosti má nejmenší prvek rovný zvolenému číslu m. K tomu vydělíme číslo 47 číslem m se zbytkem,

$$47 = qm + r \quad (q \geqq 1,\ 0 \leqq r < m),$$

a ukážeme, že existuje právě $(q+1)^r q^{m-1-r}$ vyhovujících množin X s nejmenším prvkem m. Protože každá taková množina X je podmnožina množiny

$$\mathsf{T}_m = \{m, m+1, \ldots, 47\},$$

rozdělíme množinu T_m na nejvýše m skupin čísel tak, aby se čísla v téže skupině navzájem lišila o násobky čísla m: dostaneme tak předně q-prvkovou skupinu

$$\mathsf{P}_0 = \{m, 2m, \ldots, qm\},$$

v případě $r > 0$ dalších r skupin o q prvcích

$$\mathsf{P}_i = \{m+i, 2m+i, \ldots, qm+i\} \quad (1 \leqq i \leqq r),$$

v případě $r < m-1$ a $q > 1$ pak ještě $m-r-1$ skupin o $q-1$ prvcích

$$\mathsf{P}_i = \{m+i, 2m+i, \ldots, (q-1)m+i\} \quad (r+1 \leqq i \leqq m-1).$$

Obecně lze říci, že každá skupina P_i je tvořena právě těmi čísly z T_m, která při dělení číslem m dávají zbytek i; jak jsme uvedli, některé z těchto m skupin $\mathsf{P}_0, \ldots, \mathsf{P}_{m-1}$ mohou být prázdné.

Množina $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{T}_m = \mathsf{P}_0 \cup \mathsf{P}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{P}_{m-1}$ s nejmenším prvkem m zřejmě má požadovanou vlastnost, právě když obsahuje celou skupinu P_0 a zároveň pro každé $i \in \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ buď neobsahuje žádný prvek z P_i, nebo obsahuje všechny prvky z P_i *od jistého prvku počínaje*. Tak pro každou z r skupin $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_r$ máme $q+1$ možností, zatímco pro každou z $m-r-1$ skupin $\mathsf{P}_{r+1}, \ldots, \mathsf{P}_{m-1}$ máme q možností, jak vybrat prvky pro X. Protože tyto výběry můžeme kombinovat nezávisle, je počet množin X skutečně roven číslu $(q+1)^r q^{m-1-r}$. (Platí to i pro případy $r = 0$, $r = m-1$ nebo $q = 1$, kdy některé ze skupin P_i jsou prázdné.)

Nyní zjistíme, kdy pro neúplný podíl q a zbytek r z rovnosti $47 = qm + r$ platí

$$(q+1)^r q^{m-1-r} = 2^{15}. \qquad (*)$$

V případě $q = 1$ dostáváme z $(*)$ rovnici $2^r = 2^{15}$, odkud $r = 15$, a z rovnosti $47 = m + r$ pak vychází $m = 32$.

V případě $q > 1$ musí být v rovnici $(*)$ jedna z mocnin $(q+1)^r$, q^{m-1-r} rovna 2^{15} a druhá rovna jedné, tedy musí mít nulový exponent. Proberme nyní možné hodnoty $q > 1$ v rostoucím pořadí a u každé z nich otestujme, zda příslušné řešení rovnice $(*)$ splňuje podmínku $47 = qm + r$:

a) $q = 2^1$, $m - 1 - r = 15$ a $r = 0$. Pak $m = 16$ a $qm + r = 32$ — nevyhovuje.
b) $q = 2^3 - 1$, $r = 5$ a $m - 1 - r = 0$. Pak $m = 6$ a $qm + r = 47$ — vyhovuje.
c) $q = 2^3$, $m - 1 - r = 5$ a $r = 0$. Pak $m = 6$ a $qm + r = 48$ — nevyhovuje.

Z podmínky $47 = qm + r$ plyne, že největší možné hodnoty q jsou 47 (pro $m = 1$) a 23 (pro $m = 2$). Zbylé možnosti ($q = 2^5 - 1$, $q = 2^5$, $q = 2^{15} - 1$, $q = 2^{15}$) už proto není nutné detailně rozebírat.

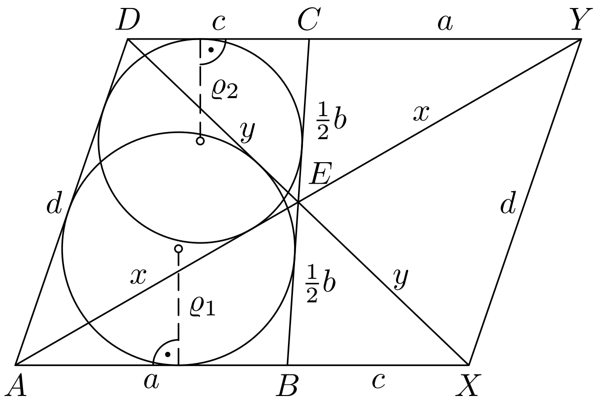
Odpověď. Hledané hodnoty m jsou dvě: $m = 6$ a $m = 32$.

3. *V lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) označme E střed ramene BC. Jsou-li oba čtyřúhelníky $ABED$ a $AECD$ tečnové, splňují délky stran lichoběžníku $ABCD$ označené obvyklým způsobem rovnosti*

$$a + c = \frac{b}{3} + d \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

Dokažte. *(R. Horenský)*

Řešení. Označme $x = |AE|$, $y = |DE|$ a doplňme lichoběžník $ABCD$ na rovnoběžník $AXYD$ tak, aby bod E byl průsečíkem jeho úhlopříček AY a DX (obr. 1). Zřejmě platí $|AX| = |DY| = a + c$, $|AY| = 2x$ a $|DX| = 2y$.



Obr. 1

Označme ϱ_1 (resp. ϱ_2) poloměr kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku $ABED$ (resp. $AECD$), jež je zároveň vepsána i trojúhelníku AXD (resp. AYD). Pro délky stran těchto čtyřúhelníků podle známého kritéria platí rovnosti

$$a + y = \frac{b}{2} + d = c + x,$$

neboli

$$a + y = c + x, \tag{1}$$

takže oba čtyřúhelníky mají týž obvod. Trojúhelníky AXD a AYD mají zase týž obsah (rovný $\frac{1}{2}S_{AXYD}$, tedy rovný S_{ABCD}). Poměr $\varrho_1 : \varrho_2$ se proto rovná jak poměru obsahů $S_{ABED} : S_{AECD}$, tak poměru obvodů $o_{AYD} : o_{AXD}$ (ty jsme zapsali v opačném pořadí než příslušné poloměry). Oba tyto poměry nyní vyjádříme a pak porovnáme (v značí výšku lichoběžníku $ABCD$):

$$\frac{S_{ABED}}{S_{AECD}} = \frac{S_{ABCD} - S_{CDE}}{S_{ABCD} - S_{ABE}} = \frac{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}v}{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}v} = \frac{2a + c}{a + 2c},$$
$$\frac{o_{AYD}}{o_{AXD}} = \frac{2x + (a+c) + d}{2y + (a+c) + d}.$$

Spolu s (1) tak pro neznámé x, y dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\frac{2a + c}{a + 2c} = \frac{2x + a + c + d}{2y + a + c + d} \qquad \text{a} \qquad x - y = a - c,$$

jež má za podmínky $a \neq c$ (zaručené tím, že $ABCD$ je *licho*běžník) jediné řešení

$$x = \frac{3a + c - d}{2} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{a + 3c - d}{2}. \tag{2}$$

Dosazením (2) do rovnosti (1) dostaneme první dokazovaný vztah $3(a + c) = b + 3d$. S jeho pomocí lze (2) přepsat do tvaru

$$x = a + \frac{b}{6} \qquad \text{a} \qquad y = c + \frac{b}{6}.$$

S tímto vyjádřením délek x, y využijeme kosinové věty pro trojúhelníky ABE, CDE k výpočtu kosinu úhlu ABE resp. DCE:

$$\cos|\sphericalangle ABE| = \frac{a^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (a + \frac{1}{6}b)^2}{2a \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9a} - \frac{1}{3},$$

$$\cos|\sphericalangle DCE| = \frac{c^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (c + \frac{1}{6}b)^2}{2c \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}.$$

Protože se úhly ABE a DCE doplňují do $180°$, je součet jejich kosinů roven nule:

$$\left(\frac{2b}{9a} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}\right) = 0.$$

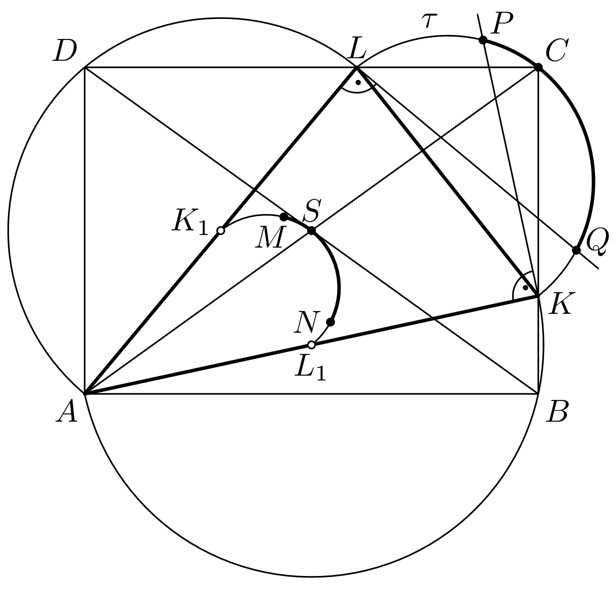
Odtud již snadnou úpravou dostaneme druhý dokazovaný vztah

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

---

4. *V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník AKL. Uvažujme libovolný pravoúhelník $ABCD$, který je trojúhelníku AKL opsán tak, že bod K leží na straně BC a bod L leží na straně CD. Určete množinu průsečíků S úhlopříček AC, BD všech takových pravoúhelníků $ABCD$.* *(J. Šimša)*

Řešení. Označme K_1 střed strany AL a L_1 střed strany AK. Ukážeme, že hledanou množinou bodů S je oblouk MN, který je částí polokružnice sestrojené nad průměrem K_1L_1 v polorovině opačné k polorovině K_1L_1A, přitom krajní body M, N zmíněného oblouku jsou určeny podmínkami $ML_1 \perp AK$ a $NK_1 \perp AL$ (obr. 2).



Obr. 2

Protože průsečík S úhlopříček AC, BD je středem úsečky AC, množinu všech bodů S dostaneme, když nejprve určíme množinu vrcholů C a tu pak zobrazíme ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{1}{2}$. Protože je úhel KCL pravý (nemůže být ani $C = K$, ani $C = L$) a přímka KL body A a C odděluje, leží bod C na polokružnici τ sestrojené nad průměrem KL v polorovině opačné k polorovině KLA. Které body $C \in \tau$ jsou skutečně vrcholy vyhovujících pravoúhelníků $ABCD$? Zřejmě právě ty, pro něž polopřímky CK a CL protnou analogicky sestrojené polokružnice nad průměry AK resp. AL (v bodech, které budou vrcholy B resp. D). Jsou to body oblouku $PQ \subset \tau$, jehož krajní body P, Q jsou určeny podmínkami $PK \perp AK$ a $QL \perp AL$. Hledaná množina bodů S je proto obrazem oblouku PQ ve zmíněné stejnolehlosti, takže to je skutečně oblouk MN popsaný v úvodu řešení (body M, N jsou obrazy bodů P a Q, neboť bod L_1 je obrazem bodu K a bod K_1 je obrazem bodu L).

---

5. *Dokažte, že pro libovolná reálná čísla p, q, r, s za podmínek $q \neq -1$ a $s \neq -1$ platí: Kvadratické rovnice*

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x^2 + rx + s = 0$$

mají v oboru reálných čísel společný kořen a jejich další kořeny jsou navzájem převrácená čísla, právě když koeficienty p, q, r, s splňují rovnosti

$$pr = (q+1)(s+1) \quad \text{a} \quad p(q+1)s = r(s+1)q.$$

(Dvojnásobný kořen kvadratické rovnice počítáme dvakrát.) *(J. Šimša)*

Řešení. V první části řešení předpokládejme, že první z daných kvadratických rovnic má kořeny u, v a druhá z nich má kořeny u, v^{-1}. Pak platí vzorce

$$p = -(u+v), \quad q = uv, \quad r = -\Big(u + \frac{1}{v}\Big), \quad s = u \cdot \frac{1}{v}. \tag{1}$$

Po jejich dosazení do jednotlivých stran rovností, jež máme dokázat, dostaneme

$$\begin{aligned}
pr &= (u+v)\Big(u + \frac{1}{v}\Big) &&= \frac{(u+v)(uv+1)}{v},\\
(q+1)(s+1) &= (uv+1)\Big(\frac{u}{v} + 1\Big) &&= \frac{(uv+1)(u+v)}{v},\\
p(q+1)s &= -(u+v)(uv+1) \cdot \frac{u}{v} &&= -\frac{(u+v)(uv+1)u}{v},\\
r(s+1)q &= -\Big(u + \frac{1}{v}\Big)\Big(\frac{u}{v} + 1\Big) \cdot uv &&= -\frac{(uv+1)(u+v)u}{v},
\end{aligned}$$

takže vidíme, že skutečně platí rovnosti

$$pr = (q+1)(s+1) \quad \text{a} \quad p(q+1)s = r(s+1)q. \tag{2}$$

Všimněme si ještě, že rovněž platí rovnosti

$$-\frac{ps}{s+1} = \frac{(u+v) \cdot \dfrac{u}{v}}{\dfrac{u}{v} + 1} = u \qquad \text{a} \qquad -\frac{p}{s+1} = \frac{u+v}{\dfrac{u}{v} + 1} = v,$$

které nám napovídají, jak postupovat při důkazu obrácené implikace.

V druhé části řešení předpokládejme, že čísla p, q, r, s splňují rovnosti (2) a navíc platí $q \neq -1$ a $s \neq -1$. Z první rovnosti (2) pak plyne $p \neq 0$ a $r \neq 0$, takže rovnosti (2) lze upravit do tvaru

$$\frac{p}{s+1} = \frac{q+1}{r} \quad \text{a} \quad \frac{ps}{s+1} = \frac{rq}{q+1}. \tag{3}$$

Definujme reálná čísla u, v pomocí vzorců

$$u = -\frac{ps}{s+1} \quad \text{a} \quad v = -\frac{p}{s+1}. \tag{4}$$

Pak platí $v \neq 0$ a podle (4) lze rovněž psát

$$u = -\frac{rq}{q+1} \quad \text{a} \quad v = -\frac{q+1}{r}. \tag{5}$$

Ověříme-li, že tato čísla u, v splňují všechny čtyři vztahy (1), bude to znamenat, že (u, v) a (u, v^{-1}) jsou dvojice kořenů kvadratických rovnic z textu úlohy a řešení úlohy bude u konce. Podle (4) a (5) je ale prověrka vztahů (1) snadná:

$$\begin{aligned}
-(u+v) &= \frac{ps}{s+1} + \frac{p}{s+1} = p,\\
uv &= \frac{-rq}{q+1} \cdot \frac{-(q+1)}{r} = q,\\
-\Big(u + \frac{1}{v}\Big) &= \frac{rq}{q+1} + \frac{r}{q+1} = r,\\
u \cdot \frac{1}{v} &= \frac{-ps}{s+1} \cdot \frac{-(s+1)}{p} = s.
\end{aligned}$$

---

6. *Rozhodněte, zda pro každé pořadí čísel* $1, 2, 3, \ldots, 15$ *lze tato čísla zapsat nejvýše čtyřmi různými barvami tak, aby všechna čísla stejné barvy tvořila v daném pořadí monotonní (tj. rostoucí nebo klesající) posloupnost. (Jednočlenná posloupnost je monotonní.)* *(J. Šimša)*

Řešení. Ukážeme, že požadovaným způsobem nelze obarvit patnáctici čísel

$$\underbrace{5, 4, 3, 2, 1}_{\text{I}}, \underbrace{9, 8, 7, 6}_{\text{II}}, \underbrace{12, 11, 10}_{\text{III}}, \underbrace{14, 13}_{\text{IV}}, \underbrace{15}_{\text{V}},$$

pod níž jsme vyznačili rozdělení na pět skupin sousedních čísel (tvořících klesající posloupnosti).

Připusťme, že uvedenou patnáctici jsme zapsali čtyřmi barvami tak, že čísla se stejnou barvou tvoří monotonní posloupnosti. Ve skupině I je pět čísel, dvě z nich proto mají stejnou barvu; protože tvoří klesající posloupnost, barvu těchto dvou čísel nemá žádné z čísel skupin II až V. V nich jsou tedy pouze čísla tří barev; barvu dvou čísel ze skupiny II nemá žádné z čísel skupin III až V, ve kterých jsou tedy pouze čísla dvou barev. Ještě jedním opakováním předchozí úvahy zjistíme, čísla 14, 13 a 15 ze skupin IV a V jsou jedné barvy, a to je spor.