46. Mezinárodní matematická olympiáda

Mexická Mérida, hlavní město poloostrova Yucatán, hostila ve dnech 8.-19. července 2005 účastníky každoroční prestižní soutěže nejlepších matematických talentů – studentů středních škol. Sjeli se tam v rekordním počtu – celkem 513 soutěžících z 91 zemí celého světa.

Přípravu a zdárný průběh celé akce zajišťovali organizátoři z řad členů *Mexické matematické společnosti* za podpory mexického ministerstva školství, vlády kraje Yucatán, tamních univerzit a desítek sponzorujících firem. Nemalé nashromážděné finanční prostředky umožnily ubytovat všechny soutěžící, vedoucí družstev i členy výborů a hodnotících komisí v areálu luxusních hotelů nedaleko centra yucatánské metropole, založené španělskými dobyvateli roku 1542 na místě mayského města *Tihó*. Mexičtí hostitelé připravili výborné podmínky pro vlastní soutěž i zajímavý doprovodný program, jehož vrcholem byl celodenní výlet ke slavným ruinám mayských staveb *Chichén Itzá*, kterým vévodí *Kukulcánova* pyramida. Bohatý program celé akce pouze mírně narušil příchod hurikánu *Emily*, který však nakonec přeletěl nad Yucatánem 80 km severně od Méridy, takže tam nezpůsobil žádné škody a účastníci MMO zažili pouze několikahodinovou bouři, na jaké jsme ve střední Evropě navyklí.

Vedoucím českého družstva byl *RNDr. Karel Horák, CSc.* z MÚ AV ČR v Praze. Naše soutěžní družstvo, které doprovázel pedagogický vedoucí *doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.* z PřF MU v Brně, bylo jmenováno (podle výsledků ústředního kola 54. ročníku MO v Benešově a následného týdenního výběrového soustředění v Bílovci) ve složení: *Jaroslav Hančl* (3. ročník, GMK Bílovec), *Pavel Kocourek* (4. ročník, SPŠ ST Panská, Praha), *František Konopecký* (8. ročník, G Holešov), *Jaromír Kuben* (3. ročník, G tř. Kpt. Jaroše, Brno), *Jakub Opršal* (3. ročník, G tř. Kpt. Jaroše, Brno), *Marek Pechal* (3. ročník, G Lesní čtvrť, Zlín).

Soutěžící na 46. MMO jako obvykle řešili ve dvou půldnech vždy tři soutěžní úlohy po dobu 4,5 hodin; za každou ze šesti úloh mohli získat nejvýše 7 bodů. Po následných opravách a mezinárodních koordinacích vyšlo najevo, že letos žádná soutěžní úloha nebyla extrémně obtížná – 16 soutěžících totiž dosáhlo maximálně možného zisku 42 bodů. Dostali pochopitelně zlaté medaile, spolu s dalšími 26 soutěžícími, kteří získali alespoň 35 bodů. Kromě 42 zlatých medailí bylo uděleno 79 stříbrných medailí (za zisk 23-34 bodů) a 127 bronzových medailí (za zisk 12-22 bodů). Naši reprezentanti podali nečekaně dobrý výkon a vybojovali pět medailí: zlatou získal *František Konopecký* (36 bodů), stříbrné medaile převzali *Jaromír Kuben* (30 bodů) a *Pavel Kocourek* (28 bodů), bronzové medaile obdrželi *Marek Pechal* (22 bodů) a *Jakub Opršal* (18 bodů), pouze *Jaroslav Hančl* se vracel domů bez ocenění. Je to bezesporu nejlepší výkon českého družstva na mezinárodní matematické olympiádách za posledních 8 let, vždyť právě tak dlouho jsme čekali na další zlatou medaili českého účastníka.

Tvrzení o českém úspěchu dokládá naše umístění v níže uvedeném neoficiálním pořadí družstev, ve kterém nám obvykle patří místo ve třetí, někdy dokonce čtvrté desítce. V mexické Méridě jsme však (překvapivě pro mnohé přítomné) obsadili 16. místo před takovými státy, jako jsou Hong-Kong, Kanada, Polsko či Austrálie, ve kterých se výchově matematických talentů věnují – ve srovnání s Českou republikou – s větší intenzitou, danou především objemem institucionálních prostředků, jež

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

jsou na tuto péči vyčleňovány. Za názvem země uvádíme v závorce vždy celkový součet bodů šesti jejích soutěžících a počet Z-S-B medailí: 1. ČLR (235, 5-1-0), 2. USA (213, 4-2-0), 3. Rusko (212, 4-2-0), 4. Írán (201, 2-4-0), 5. Korea (200, 3-3-0), 6. Rumunsko (191, 4-1-1), 7. Tchaj-wan (190, 3-2-1), 8. Japonsko (188, 3-1-2), 9.–10. Maďarsko (181, 2-3-1) a Ukrajina (181, 2-2-2), 11. Bulharsko (173, 2-3-1), 12. Německo (163, 1-3-2), 13. Velká Británie (159, 1-3-2), 14. Singapur (145, 0-4-2), 15. Vietnam (143, 0-3-3), 16. *Česká republika* (139, 1-2-2), 17. Hongkong (138, 1-3-1), 18. Bělorusko (136, 1-3-1), 19. Kanada (132, 1-2-2), 20. *Slovensko* (131, 0-4-2), 21.–22. Moldavsko (130, 1-2-2) a Turecko (130, 0-4-1), 23. Thajsko (128, 0-4-2), 24. Itálie (120, 0-2-4), 25. Austrálie (117, 0-0-6), 26. Izrael (113, 0-2-3), 27. Kazachstán (112, 0-2-3), 28.–29. Kolumbie (105, 0-2-2) a Polsko (105, 0-1-5), 30. Peru (104, 0-0-6), 31. Mexiko (91, 0-0-4), 32. Francie (83, 0-0-4), 33.–35. Arménie (82, 0-0-5), Brazílie (82, 1-0-1) a Chorvatsko (82, 0-1-2), 36. Indie (81, 0-1-1), 37. Gruzie (80, 0-0-4), 38. Nový Zéland (77, 0-1-2), 39. Srbsko a Černá Hora (75, 0-0-3), 40.–41. Belgie (74, 0-1-1), Rakousko (74, 0-0-2), ...

Na závěr této zprávy ještě uvádíme zadání všech šesti úloh, které soutěžící v Méridě řešili.

Texty úloh 46. MMO

1. Na stranách rovnostranného trojúhelníku ABC je zvoleno šest bodů: body A_1, A_2 na straně BC, body B_1, B_2 na straně CA a body C_1, C_2 na straně AB, přičemž tyto body tvoří vrcholy konvexního šestiúhelníku $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ se stranami téže délky. Dokažte, že přímky A_1B_2, B_1C_2 a C_1A_2 mají společný bod. (Rumunsko)

2. Nechť $a_1, a_2, \dots$ je posloupnost celých čísel s nekonečným počtem kladných členů a s nekonečným počtem záporných členů. Předpokládejme, že pro každé přirozené číslo n čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ po dělení číslem n dávají n různých zbytků. Dokažte, že každé celé číslo se v posloupnosti vyskytuje právě jednou. (Holandsko)

3. Nechť x, y a z jsou kladná reálná čísla taková, že $xyz \geqq 1$. Dokažte, že

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqq 0. \quad \text{(Korea)}$$

4. Uvažujme posloupnost $a_1, a_2, \dots$ definovanou vztahem

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Určete všechna kladná celá čísla, která jsou nesoudělná s každým členem uvažované posloupnosti. (Polsko)

5. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stejně dlouhými a různoběžnými stranami BC a AD. Nechť bod E leží uvnitř strany BC a bod F uvnitř strany AD, přičemž $|BE| = |DF|$. Přímky AC a BD se protínají v bodě P, přímky BD a EF v bodě Q, přímky EF a AC v bodě R. Uvažujme všechny trojúhelníky PQR určené měnícími se body E a F. Ukažte, že kružnice opsané těmto trojúhelníkům mají společný bod různý od P. (Polsko)

6. V matematické soutěži dostali soutěžící 6 úloh. Každou dvojici úloh vyřešilo více než $\frac{2}{5}$ soutěžících. Všech 6 úloh nevyřešil nikdo. Dokažte, že právě 5 úloh vyřešili aspoň dva soutěžící. (Rumunsko)