ÚLOHY DOMÁCÍHO KOLA 55. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

KATEGORIE A

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

(*J. Švrček*)

2. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec. (*E. Kováč*)

3. Posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *nenulových* celých čísel má tu vlastnost, že pro každé $n \geq 0$ platí $a_{n+1} = a_n - b_n$, kde b_n je číslo, které má stejné znaménko jako číslo a_n, ale opačné pořadí číslic (zápis čísla b_n může narozdíl od zápisu čísla a_n začínat jednou nebo více nulami). Například pro $a_0 = 1\,210$ je $a_1 = 1\,089$, $a_2 = -8\,712$, $a_3 = -6\,534$, …

a) Dokažte, že posloupnost (a_n) je periodická.

b) Zjistěte, jaké nejmenší přirozené číslo může být a_0. (*T. Jurík*)

4. Najděte všechny kubické rovnice $P(x) = 0$, které mají aspoň dva různé reálné kořeny, z nichž jeden je číslo 7, a které pro každé reálné číslo t splňují podmínku: Jestliže $P(t) = 0$, pak $P(t+1) = 1$. (*P. Novotný*)

5. Jsou dány úsečky délek a, b, c, d. Dokažte, že konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ se stranami délek a, b, c, d (při obvyklém značení) existují a přitom úhlopříčky každého z nich svírají jeden a týž úhel, právě když platí rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. (*J. Šimša*)

6. Najděte všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 2005(x - y).$$

(*J. Moravčík*)

KATEGORIE B

1. Určete všechny hodnoty celočíselného parametru a, pro něž má rovnice

$$(x + a)(x + 2a) = 3a$$

aspoň jeden celočíselný kořen. (*J. Zhouf*)

2. V daném trojúhelníku ABC označme D ten bod polopřímky CA, pro který platí $|CD| = |CB|$. Dále označme po řadě E, F středy úseček AD a BC. Dokažte, že $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$, právě když $|AB| = |BC|$. (*P. Leischner*)

3. Rozhodněte, zda nerovnost

$$a(b+1)+b(c+1)+c(d+1)+d(a+1) \geq \tfrac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

platí pro libovolná kladná čísla a, b, c, d, která vyhovují podmínce
a) $ab = cd = 1$; b) $ac = bd = 1$. (*J. Šimša*)

4. Každou z hvězdiček v zápisech dvanáctimístných čísel $A = *88\,888\,888\,888$, $B = *11\,111\,111\,111$ nahraďte nějakou číslicí tak, aby výraz $|14A - 13B|$ měl co nejmenší hodnotu. (*J. Šimša*)

5. Kruh o středu S a poloměru r je rozdělen na čtyři části dvěma tětivami, z nichž jedna má délku r a druhá má od středu S vzdálenost $\frac{1}{2}r$. Dokažte, že absolutní hodnota rozdílu obsahů těch dvou částí, které mají společný právě jeden bod a přitom žádná z nich neobsahuje střed S, je roven jedné šestině obsahu kruhu. (*P. Leischner*)

6. Určete nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: Zvolíme-li n různých přirozených čísel menších než 2 005, jsou mezi nimi dvě taková, že podíl součtu a rozdílu jejich druhých mocnin je větší než tři. (*J. Zhouf*)

KATEGORIE C

1. a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo m je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 60.
b) Určete všechna přirozená čísla m, pro která je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 120.
(*J. Moravčík*)

2. Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtěte poloměr kružnice m. Najděte všechna řešení. (*L. Boček*)

3. Určete počet všech trojic navzájem různých trojmístných přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým ze tří sčítaných čísel. (*J. Šimša*)

4. Je dáno přirozené číslo n ($n \geq 2$) a reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pro která platí

$$x_1x_2 = x_2x_3 = \cdots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1.$$

Dokažte, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n.$$

(*J. Švrček*)

5. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu C a P, Q odpovídající paty kolmic vedených bodem D na strany AC a BC. Obsahy trojúhelníků ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočtěte $S_1 : S_3$, jestliže $S_1 : S_2 = 2 : 3$, $S_3 : S_4 = 3 : 8$.
(*P. Novotný*)

6. Rozhodněte, které z čísel

$$\sqrt{p+\sqrt{q}} + \sqrt{q+\sqrt{p}}, \quad \sqrt{p+\sqrt{p}} + \sqrt{q+\sqrt{q}}$$

je větší, jsou-li p a q různá kladná čísla. (*J. Moravčík*)