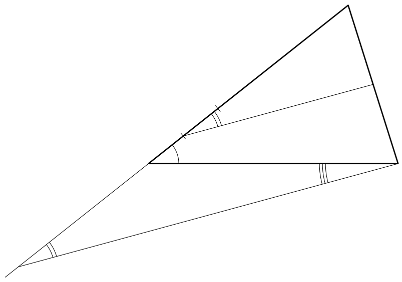
55. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí

$$p + q^2 = q + p^3.$$

2. Obdélník $ABCD$ se stranami délek $|AB| = 2\,008$ a $|BC| = 2\,006$ je rozdělen na $2\,008 \times 2\,006$ jednotkových čtverců a ty jsou střídavě obarveny černou, šedou a bílou barvou podobně jako obdélník na obrázku: čtverce při vrcholech A a B jsou černé, čtverce při vrcholech C a D jsou bílé. Určete obsah té části trojúhelníku ABC, která je šedá.



3. V lichoběžníku $ABCD$, jehož základna AB má dvakrát větší délku než základna CD, označme E střed ramene BC. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází středem úhlopříčky AC, právě když strany AB a BC jsou navzájem kolmé.

4. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí

$$1 \leqq a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leqq 9.$$

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 21. března 2006

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Danou rovnici upravíme na tvar

$$q(q-1) = p(p-1)(p+1);$$

odtud plyne nerovnost $p < q$ (kdyby totiž bylo $p \geqq q$, potom i $p-1 \geqq q-1 > 0$, a protože $p+1 > 1$, bylo by $p(p-1)(p+1) > q(q-1)$) a také to, že q dělí součin $p(p-1)(p+1)$. Protože q je prvočíslo, musí platit aspoň jeden ze vztahů $q \mid p$, $q \mid (p-1)$, $q \mid (p+1)$. Vzhledem k podmínkám $p < q$ a $p > 1$ nemůže q dělit ani p, ani $p-1$, a proto $q \mid (p+1)$. Musí tedy platit $q \leqq p+1$, a to spolu s $p < q$ dává $q = p+1$.

Jediná dvě prvočísla lišící se o 1 jsou 2 a 3. Proto $p = 2$ a $q = 3$. Zkouškou ověříme, že skutečně platí $2 + 3^2 = 3 + 2^3$.

Poznámka. Nerovnost $p < q$ se dá dokázat i následující úvahou: Zřejmě $p \neq q$. Prvočísla p a q jsou tedy nesoudělná, a protože $p \mid q(q-1)$, musí platit $p \mid (q-1)$ a odtud $p \leqq q-1$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za zjištění, že $p < q$, dejte 1 bod; 2 body za důkaz $q \mid (p+1)$ a další dva za $q = p+1$ a z toho vyplývající $p = 2$, $q = 3$. Jeden bod za ověření, že dvojice $p = 2$, $q = 3$ je skutečně řešením.

2. Šedá část obdélníku $ABCD$ se stranami délek $3n+1$ a $3n-1$, který má jednotkové čtverce při dvou vrcholech obarveny černou barvou a jednotkové čtverce při dalších dvou vrcholech bílou barvou, je souměrná podle středu obdélníku (stačí si uvědomit souměrnou sdruženost šedých čtverců nejbližších souměrně sdruženým vrcholům A a C, resp. B a D, symetrie na celém obdélníku pak plyne z toho, ze šedé čtverce se v každém řádku i sloupci opakují s periodou 3). Proto je šedá část trojúhelníku ABC shodná se šedou částí trojúhelníku CDA, a tedy obsah šedé části trojúhelníku ABC je roven polovině obsahu šedé části obdélníku $ABCD$.

Obdélník $ABCD$ rozdělme na obdélník se stranami délek $3n$ a $3n-1$ a pás $3n-1$ jednotkových čtverců, v němž jeden koncový čtverec je černý a druhý bílý. V obdélníku $3n \times (3n-1)$ je počet černých, bílých i šedých jednotkových čtverců stejný, takže šedých je $n(3n-1)$. Kdybychom k pásu délky $3n-1$ přidali jeden šedý čtverec, byl by tam rovněž stejný počet n černých, bílých a šedých čtverců; v páse délky $3n-1$ je tedy $n-1$ šedých čtverců. Šedých čtverců v obdélníku $ABCD$ je $n(3n-1) + (n-1) = 3n^2 - 1$ a šedá část trojúhelníku ABC má obsah $S = \frac{1}{2}(3n^2-1)$; pro obdélník $2\,008 \times 2\,006$ je $n = 669$, takže

$$S = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 669^2 - 1) = \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{3} \cdot 2\,007^2 - 1\Big) = \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{4\,028\,049}{3} - 1\Big) =$$
$$= \frac{4\,028\,046}{6} = 671\,341.$$

Poznámka. Obsah šedé části trojúhelníku ABC můžeme určit i tak, že po diagonálách postupně spočítáme šedé čtverce, jež jsou celé obsaženy v trojúhelníku ABC, a připočteme polovinu počtu čtverců v prostřední šedé diagonále obdélníku $ABCD$, která je souměrná podle středu obdélníku, takže její část ležící v trojúhelníku ABC je shodná s částí ležící v trojúhelníku CDA:

$$S = 3 + 6 + \ldots + 2\,004 + \frac{1}{2} \cdot 2\,006 = 334 \cdot 2\,007 + 1\,003 = 671\,341.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, 3 body udělte za důkaz toho, že obsah šedé části trojúhelníku ABC je roven polovině obsahu šedé části obdélníku $ABCD$. Nestačí argumentovat shodností trojúhelníků ABC a CDA, například obsahy jejich bílých částí nejsou stejné. Další tři body udělte za správný výpočet obsahu.

3. Označme S střed úhlopříčky AC. Úsečka SE je střední příčka trojúhelníku ABC, takže $|SE| = \frac{1}{2}|AB| = |DC|$. Navíc je $SE \parallel AB \parallel DC$. Úsečky SE a DC jsou rovnoběžné a shodné, proto je $SECD$ rovnoběžník.

Kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází bodem S právě tehdy, je-li rovnoběžník $SECD$ tětivový. Čtyřúhelník je tětivový, právě když je součet velikostí jeho protilehlých úhlů $180°$. V rovnoběžníku jsou ale protilehlé úhly shodné, takže je tětivový, právě když to je pravoúhelník, neboli když úhel ECD, a tedy i úhel ABC je pravý.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, 3 body za důkaz toho, že $SECD$ je rovnoběžník a další 3 body za důkaz kolmosti.

4. V celém textu předpokládejme, že $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$. Označme

$$V = a + b + c + 2(ab + ac + bc) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c)$$

a nejprve místo nerovnosti $V \geqq 1$ dokažme silnější nerovnost

$$a + b + c + (1 - a)(1 - b)(1 - c) \geqq 1.$$

Roznásobením a úpravou levé strany dostaneme

$$\begin{aligned}(a + b + c) &+ (1 - a)(1 - b)(1 - c) = \\ &= 1 + ab + ac + bc - abc = 1 + ab(1 - c) + ac + bc \geqq 1,\end{aligned}$$

protože v posledním součtu za jedničkou následují vesměs nezáporné sčítance.

K důkazu nerovnosti $V \leqq 9$ stačí vzhledem k tomu, že

$$2(ab + ac + bc) \leqq 6,$$

ověřit nerovnost

$$a + b + c + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leqq 3.$$

Uděláme to tak, že zřejmé nerovnosti

$$(1 - a)(1 - b) \leqq 1, \quad (1 - a)(1 - c) \leqq 1, \quad (1 - b)(1 - c) \leqq 1$$

vynásobíme po řadě (nezápornými) čísly $1-c$, $1-b$, $1-a$; po sečtení všech tří získaných nerovností obdržíme

$$3(1-a)(1-b)(1-c) \leqq (1-a)+(1-b)+(1-c),$$

odkud již snadnou úpravou plyne kýžená nerovnost.

Jiné řešení. Zaměňme písmena a, b, c obvyklejšími písmeny x, y, z k označení proměnných (v našem případě z intervalu $\langle 0,1\rangle$). Daný výraz $V = V(x,y,z)$ je při pevných hodnotách y, z lineární funkcí $Ax+B$ proměnné x s koeficienty

$$\begin{aligned} A &= 1+2(y+z)-3(1-y)(1-z),\\ B &= y+z+2yz+3(1-y)(1-z). \end{aligned}$$

Protože grafem každé lineární funkce na uzavřeném intervalu je úsečka, budou nerovnosti $1 \leqq V(x,y,z) \leqq 9$ platit pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$, právě když budou platit pro obě krajní hodnoty $x=0$ a $x=1$, neboli $1 \leqq V(0,y,z) \leqq 9$ a $1 \leqq V(1,y,z) \leqq 9$. Protože pro libovolná $y, z \in \langle 0,1\rangle$ máme

$$\begin{aligned} V(0,y,z) &= y+z+2yz+3(1-y)(1-z) \leqq 1+1+2+3,\\ V(1,y,z) &= 1+y+z+2(y+z+yz) \leqq 1+1+1+2\cdot 3, \end{aligned}$$

jsou nerovnosti $V(0,y,z) \leqq 9$ a $1 \leqq V(1,y,z) \leqq 9$ zřejmé. K důkazu zbylé nerovnosti $V(0,y,z) \geqq 1$ si opět povšimneme, že při pevném z je výraz $V(0,y,z)$ lineární funkcí $Cy+D$ proměnné y. Stačí proto pouze ověřit, že $V(0,0,z) \geqq 1$ a zároveň $V(0,1,z) \geqq 1$. To je ale zřejmé, neboť pro $z \in \langle 0,1\rangle$ platí

$$V(0,0,z) = 3-2z \geqq 1 \quad \text{a} \quad V(0,1,z) = 1+3z \geqq 1.$$

Tím je úloha vyřešena. Dodejme ještě, že ze zmíněné linearity výrazu V v *každé* z proměnných x, y, z vyplývá, že jak největší, tak i nejmenší hodnota V na množině všech trojic (x,y,z) čísel z intervalu $\langle 0,1\rangle$ musí být rovna jednomu z osmi čísel

$$\begin{aligned} &V(0,0,0),\ V(0,0,1),\ V(0,1,0),\ V(0,1,1),\\ &V(1,0,0),\ V(1,0,1),\ V(1,1,0),\ V(1,1,1); \end{aligned}$$

s ohledem na symetrii výrazu V stačí vyčíslit pouze hodnoty $V(0,0,0)=3$, $V(0,0,1)=1$, $V(0,1,1)=4$ a $V(1,1,1)=9$.

Další řešení. Představme si krychli $1\times 1\times 1$ a tři navzájem kolmé roviny (rovnoběžné se stěnami krychle), které rozdělují hrany vycházející z každého vrcholu krychle na dvojice úseček délek a a $1-a$, b a $1-b$, resp. c a $1-c$. Vidíme, že celou krychli lze pokrýt soustavou čtyř kvádrů o rozměrech

$$a\times 1\times 1,\quad 1\times b\times 1,\quad 1\times 1\times c,\quad (1-a)\times(1-b)\times(1-c),$$

což vyjádřeno jejich objemy dává geometrický důkaz nerovnosti

$$a \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot b \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot c + (1-a)(1-b)(1-c) \geqq 1,$$

ze které jsme odvodili závěr $V \geqq 1$ v prvním řešení. K druhému závěru $V \leqq 9$ nás tam přivedla nerovnost

$$a \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot b \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot c + 3(1-a)(1-b)(1-c) \leqq 3,$$

která má rovněž jasné „objemové" zdůvodnění: v součtu na levé straně je každá část objemu celé krychle započítána nejvýše třikrát. Tím je celé geometrické řešení úlohy hotovo.

K předchozímu dodejme, že pokud přidáme k uvedeným čtyřem kvádrům ještě dva exempláře čtvrtého z nich a po dvou exemplářích každého ze tří kvádrů

$$a \times b \times 1,\ a \times 1 \times c,\ 1 \times b \times c,$$

bude hodnota V součtem objemů těchto 12 kvádrů, kterými lze „několikanásobně" zaplnit celou krychli. Přitom každá z osmi částí krychle (rozdělené zmíněnými třemi rovinami) je součástí devíti, tří, čtyř nebo jednoho z 12 uložených kvádrů. Přesněji to zapíšeme rovností

$$\begin{aligned} V = 9abc &+ 3(1-a)(1-b)(1-c) + \\ &+ 4ab(1-c) + 4ac(1-b) + 4bc(1-a) + \\ &+ a(1-b)(1-c) + b(1-a)(1-c) + c(1-a)(1-b). \end{aligned}$$

Vzhledem k počtu použitých částí tak pro objem V nutně platí $1 \leqq V \leqq 9$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů: za důkaz nerovnosti $V \geqq 1$ dejte 2 body, za důkaz nerovnosti $V \leqq 9$ udělte 4 body.