55. ročník matematické olympiády
III. kolo kategorie A

Litoměřice, 26.–29. března 2006

1. *Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel má tu vlastnost, že pro každé $n \geqq 1$ platí $a_{n+1} = a_n + b_n$, kde b_n je číslo, které má opačné pořadí číslic než číslo a_n (zápis čísla b_n může na rozdíl od zápisu čísla a_n začínat jednou nebo více nulami). Například pro $a_1 = 170$ platí $a_2 = 241$, $a_3 = 383$, $a_4 = 766$, … Rozhodněte, zda a_7 může být prvočíslo.* *(Peter Novotný)*

Řešení. Dokážeme, že člen a_7 je vždy složené číslo dělitelné jedenácti. Klíčem k řešení úlohy je kritérium dělitelnosti jedenácti. Je-li $\overline{c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0}$ zápis čísla m v desítkové soustavě, dává číslo m při dělení jedenácti stejný zbytek jako střídavý součet jeho číslic:

$$\mathrm{zb}(m) = c_0 - c_1 + c_2 - \ldots + (-1)^k c_k.$$

Pro zbytek čísla b_n, které má opačné pořadí číslic než číslo a_n, tedy platí, že je $\mathrm{zb}(b_n) = \pm\,\mathrm{zb}(a_n)$ podle toho, je-li počet číslic čísla a_n lichý či sudý. Proto je-li některý člen uvažované posloupnosti dělitelný jedenácti, jsou jedenácti dělitelné i všechny následující členy. Navíc jakmile má nějaký člen a_n uvažované posloupnosti sudý počet číslic, je $\mathrm{zb}(a_n) = -\,\mathrm{zb}(b_n)$, takže $a_{n+1} = a_n + b_n$ je už dělitelné jedenácti (a stejně tak i další členy).

Posloupnost (a_n) je zřejmě rostoucí. Má-li člen a_1 sudý počet číslic, bude již člen a_2 složené číslo dělitelné jedenácti s výjimkou případu $a_1 = 10$, kdy ovšem $a_3 = 22$. Stačí tedy ukázat, že i pro čísla a_1 s lichým počtem číslic bude mezi prvními šesti členy posloupnosti vždy aspoň jeden člen se sudým počtem číslic. Dokážeme to sporem v následujícím odstavci.

Předpokládejme naopak, že všechna čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ mají lichý počet číslic. Označme c první a d poslední číslici čísla a_1, takže $1 \leqq c \leqq 9$ a $0 \leqq d \leqq 9$ (v případě jednomístného a_1 klademe $c = d$). Číslo b_1 pak bude formálně začínat číslicí d a končit číslicí c, a protože předpokládáme, že číslo $a_2 = a_1 + b_1$ má rovněž lichý, tedy stejný počet číslic, musí být $c + d < 10$. To bude tedy číslice na jeho posledním místě, zatímco na prvním místě bude stát $c + d$ nebo $c + d + 1$ (podle toho, zda při sčítání došlo na předposledním místě k přechodu přes desítku), v každém případě bude na prvním místě číslice aspoň $c + d$. Podobně postupně zjistíme, že první číslice čísla $a_3 = a_2 + b_2$ bude aspoň $2(c + d)$, první číslice čísla $a_4 = a_3 + b_3$ bude aspoň $4(c + d)$, první číslice čísla $a_5 = a_4 + b_4$ bude aspoň $8(c+d)$ a první číslice čísla $a_6 = a_5 + b_5$ bude aspoň $16(c+d)$. Protože $1 \leqq c + d < 10$, nemůže už zřejmě být $16(c + d) < 10$. Aspoň v jednom z čísel $a_2, a_3, \ldots, a_6$ se tudíž počet číslic zvýšil z lichého počtu na sudý.

Tím je úloha vyřešena. Dokázali jsme, že a_7 není nikdy prvočíslo.

Poznámka. Pro $a_1 = 10\,220$ vyjde $a_6 = 185\,767$, což je prvočíslo.

2. *Nechť m a n jsou přirozená čísla taková, že rovnice*

$$(x + m)(x + n) = x + m + n$$

má aspoň jedno celočíselné řešení. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 2.$$

(J. Šimša)

Řešení. Ukážeme, že z předpokladu úlohy plynou silnější odhady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqq \frac{m}{n} \leqq 2 - \frac{2}{n}. \tag{1}$$

Danou rovnici nejprve upravíme do tvaru

$$(x + m - 1)(x + n) = m.$$

Je-li v této rovnosti x celé číslo, dostáváme rozklad přirozeného čísla m na součin dvou celých čísel, která tudíž leží obě buď v intervalu $\langle 1, m\rangle$, nebo v intervalu $\langle -m, -1\rangle$. V každém případě rozdíl těchto dvou čísel nepřevyšuje (společnou) délku obou intervalů:

$$(x + n) - (x + m - 1) \leqq m - 1, \quad \text{neboli} \quad n \leqq 2m - 2,$$

odkud plyne dolní odhad (1). Vzhledem k symetrické roli čísel m a n platí rovněž nerovnost $m \leqq 2n - 2$, která vede na horní odhad (1).

Jiné řešení. S ohledem na symetrii stačí uvažovat případ $m \geqq n$ a dokázat horní odhad (1) z prvního řešení, tedy nerovnost $m \leqq 2n - 2$.

Daná rovnice je tvaru $x^2 + (m + n - 1)x + mn - m - n = 0$ a má diskriminant

$$D = (m + n - 1)^2 - 4(mn - m - n) = m^2 + n^2 - 2mn + 2m + 2n + 1 =$$
$$= (m - n + 1)^2 + 4n.$$

Ten musí být druhou mocninou celého čísla, má-li mít daná rovnice celočíselné řešení. Protože $4n$ je kladné sudé číslo, je číslo D větší než mocnina $(m - n + 1)^2$ a má stejnou paritu jako její základ $(m-n+1)$, který je kladný, neboť uvažujeme pouze případ $m \geqq n$. Proto musí platit $D = k^2$, kde k je celé číslo splňující podmínky $k > m - n + 1 > 0$ a $k \equiv m - n + 1 \pmod 2$. Znamená to, že $k \geqq m - n + 3$, takže platí

$$D = (m - n + 1)^2 + 4n = k^2 \geqq (m - n + 3)^2 = (m - n + 1 + 2)^2 =$$
$$= (m - n + 1)^2 + 4(m - n + 1) + 4.$$

Odtud plyne nerovnost $4n \geqq 4(m-n+1)+4$, neboli $m \leqq 2n-2$, což jsme měli dokázat.

Poznámky. Protože dvojice tvaru $(m, n) = (2n - 2, n)$ a $(m, n) = (m, 2m - 2)$ vyhovují podmínce úlohy, jsou odhady (1) nejlepší možné.

Je možné popsat všechny dvojice přirozených čísel (m, n), které vyhovují podmínce úlohy, a to způsobem uvedeným v následujícím tvrzení.

Věta. *Nechť m a n jsou celá čísla. Rovnice $(x+m)(x+n) = x+m+n$ má aspoň jedno celočíselné řešení, právě když jsou čísla m, n tvaru*

$$m = (a - 1)b \quad \text{a} \quad n = a(b - 1), \quad \textit{kde} \quad a, b \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

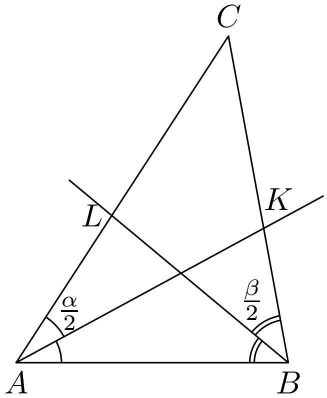
---

3. *V trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme K průsečík osy vnitřního úhlu BAC se stranou BC a L průsečík osy vnitřního úhlu ABC se stranou AC. Dále označme S střed kružnice vepsané, O střed kružnice opsané a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

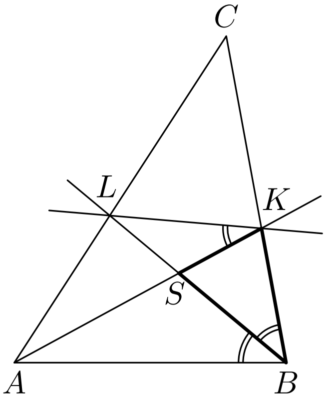
a) Přímka KL se dotýká kružnic opsaných trojúhelníkům ALS, BVS a BKS.

b) Body A, B, K, L a O leží na jedné kružnici. *(T. Jurík)*

Řešení. Označme úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Z vlastností bodů K a L je zřejmé (obr. 1), že body A, B, K, L leží na kružnici, právě když $|\sphericalangle KAL| = |\sphericalangle KBL|$, tj. právě když $\alpha = \beta$.



Obr. 1



Obr. 2

Přímka KL se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BKS (nutně v bodě K), právě když se rovnají úsekový a obvodový úhel příslušné tětivě KS (obr. 2): $|\sphericalangle LKA| = |\sphericalangle LBK| = \frac{1}{2}\beta = |\sphericalangle LBA|$. Poslední rovnost je ovšem ekvivalentní tomu, že body A, B, K, L leží na kružnici, což jak už víme, je právě když $\alpha = \beta$. (Jak je zřejmé ze symetrie, je to zároveň ekvivalentní tomu, že se přímka KL dotýká kružnice opsané trojúhelníku ALS.)

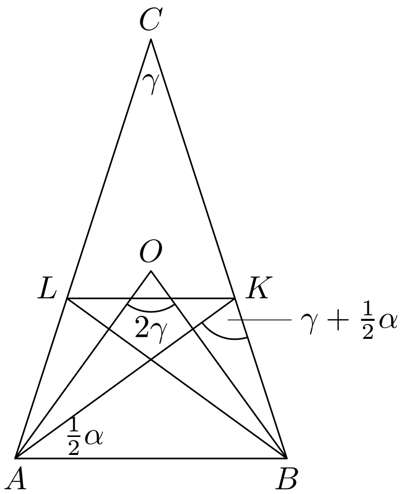
Z uvedených výsledků plyne, že svá další zkoumání můžeme omezit na rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB. Podívejme se nejprve, kdy kružnice opsaná čtyřúhelníku $ABKL$ obsahuje bod O. Středový úhel AOB v kružnici opsané trojúhelníku ABC má velikost 2γ, zatímco velikost úhlu AKB je $180° - \frac{1}{2}\alpha - \beta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ (obr. 3). Bod O přitom nemůže ležet na straně AB (když je úhel γ pravý) ani v polorovině opačné k ABC (když je úhel γ tupý), protože v tom případě vyjde

$$|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle AKB| = (360° - 2\gamma) + (\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha) = 180° + \tfrac{3}{2}\alpha + \beta > 180°.$$

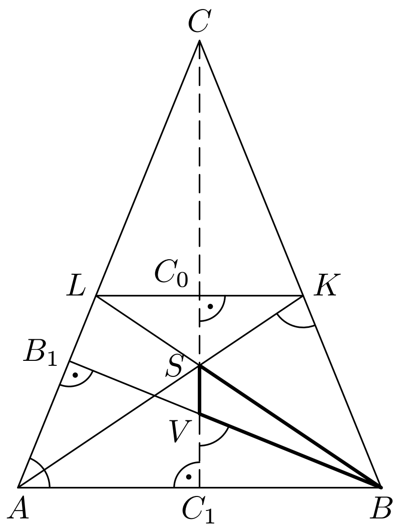
Body A, B, K, O tedy leží na jedné kružnici, právě když

$$2\gamma = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{neboli} \quad \alpha = \beta = 2\gamma = 72°.$$

Zbývá zodpovědět otázku, kdy se kružnice opsaná trojúhelníku BVS dotýká přímky KL. V polorovině KLB existují dvě kružnice, které obsahují body B a S a dotýkají se přímky KL (Apolloniova úloha, pro bod dotyku T z mocnosti bodu L k takové kružnici platí $|LT|^2 = |LS| \cdot |LB|$). Jednu takovou kružnici už známe, je to kružnice opsaná trojúhelníku BKS, jež se přímky KL dotýká v bodě K. Druhá kružnice se tedy dotýká přímky KL v bodě K' souměrně sdruženém s K podle středu L. Má-li kružnice l opsaná trojúhelníku BVS ležet v polorovině KLB, musí v ní ležet i její bod V, který je pak nutně vnitřním bodem úsečky C_0C_1, jež je částí osy úsečky AB (obr. 4). Úhel SBV je tedy ostrý (jeho velikost je nejvýše $\frac{1}{2}\beta$), proto střed kružnice l leží v polorovině C_0C_1B a leží tam i jeho kolmý průmět (případný bod dotyku) na přímku KL. Kružnice l se tudíž dotýká přímky KL jedině v případě, když je to kružnice opsaná trojúhelníku BKS, tedy když body B, K, S, V leží na jedné kružnici. To nastane, právě když $|\sphericalangle C_1VB| = |\sphericalangle SKB|$ (to platí bez ohledu na to, zda bod V leží



Obr. 3



Obr. 4

mezi body C_1, S, nebo mezi body C_0, S; obr. 4). Z pravoúhlých trojúhelníků ABB_1 a BVC_1 plyne $|\sphericalangle C_1VB| = \alpha$, takže rovnost $|\sphericalangle C_1VB| = |\sphericalangle SKB|$ platí, právě když

$$\alpha = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{neboli} \quad \alpha = \beta = 2\gamma = 72^\circ.$$

Dokázali jsme, že obě podmínky a) a b) jsou ekvivalentní tomu, že trojúhelník ABC je rovnoramenný s úhly $\alpha = \beta = 72^\circ$ a $\gamma = 36^\circ$.

---

4. *V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík výšek V a střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici.* *(J. Švrček)*

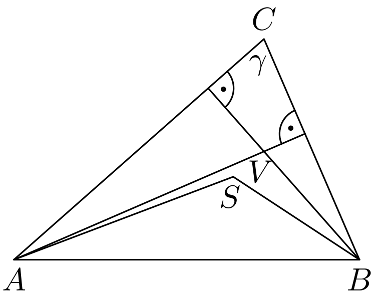
Řešení. Protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží body V a S uvnitř něho. Označíme-li velikosti úhlů v daném trojúhelníku obvyklým způsobem, platí (obr. 5)

$$|\sphericalangle AVB| = 180^\circ - \gamma \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle ASB| = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

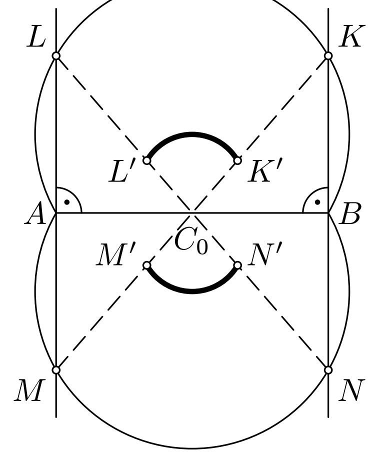
Body A, B, V a S tedy leží na jedné kružnici, právě když $|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle ASB|$, což je podle uvedených vzorců ekvivalentní s rovností $\gamma = 60^\circ$. Vrchol C tak nutně leží na některém ze dvou kružnicových oblouků, z nichž je vidět úsečku AB pod úhlem 60°. Protože je trojúhelník ABC ostroúhlý, musí navíc vrchol C ležet uvnitř pásu vymezeného kolmicemi k přímce AB v bodech A a B. Vrchol C je tedy vnitřním bodem takto vymezených kružnicových oblouků KL a MN (obr. 6).

Označme dále C_0 střed úsečky AB. Protože těžiště T každého z uvažovaných trojúhelníků ABC je obrazem bodu C ve stejnolehlosti se středem C_0 a koeficientem $\frac{1}{3}$, je bod T vnitřním bodem jednoho z oblouků $K'L'$ nebo $M'N'$, jež jsou obrazy oblouků KL a MN v uvažované stejnolehlosti.

Protože zmíněná stejnolehlost je vzájemně jednoznačné zobrazení, je zřejmé, že každý vnitřní bod oblouků $K'L'$ nebo $M'N'$ má požadovanou vlastnost, tj. je těžištěm ostroúhlého trojúhelníku ABC s úhlem 60° při vrcholu C, jehož odpovídající body V a S leží na jedné kružnici s vrcholy A a B.



Obr. 5



Obr. 6

---

5. *Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňující následující podmínky:*

$$p \mid q + r,$$
$$q \mid r + 2p,$$
$$r \mid p + 3q.$$

(M. Panák)

Řešení. Hledejme trojice p, q, r podle toho, které z těchto tří čísel je největší:

▷ *Největší je p.* Pak z podmínky $p \mid q + r$ a z nerovnosti $q + r < 2p$ plyne $q + r = p$. Z druhé podmínky pak dostaneme $q \mid r + 2p = 3r + 2q$, tedy $q \mid 3r$, což vzhledem k různosti prvočísel znamená, že $q = 3$. Tedy $p = r + 3$ a poslední podmínka říká, že $r \mid r + 12$, neboli $r \mid 12$, tedy $r = 2$ (prvočísla mají být různá). Je tedy $p = 5$. Tato trojice vskutku splňuje podmínky ze zadání.

▷ *Největší je q.* Pak podmínka $q \mid r + 2p$ a nerovnost $r + 2p < 3q$ dávají $r + 2p = q$ nebo $r + 2p = 2q$.
Je-li $2q = r + 2p$, musí být r sudé. Je tedy $r = 2$ a z rovnosti $2q = 2 + 2p$ plyne $q = p + 1$, což pro prvočísla p, q větší než $r = 2$ není možné.
Je-li $q = r + 2p$, první podmínka říká, že $p \mid 2r + 2p$, tedy $p \mid 2r$, tudíž $p = 2$. Poslední podmínka pak dává $r \mid p + 3q = 3r + 7p = 3r + 14$, tedy $r \mid 14$, takže $r = 7$. Potom je $q = r + 2p = 11$. Tato trojice rovněž vyhovuje zadání.

▷ *Největší je r.* Pak srovnáme podmínku $r \mid p + 3q$ a nerovnost $p + 3q < 4r$.
Kdyby bylo $p + 3q = 3r$, bylo by $p = 3(r - q)$, tedy $p = 3$, $r - q = 1$, takže $r = 3$ a $q = 2$, což nejsou tři různá prvočísla.
Pokud $p + 3q = 2r$, dostáváme z první podmínky $p \mid 2(q + r) = p + 5q$, takže $p \mid 5q$ a $p = 5$. Druhá podmínka pak dává $q \mid 2(r + 2p) = 2r + 20 = 3q + 25$, tedy $q = 5$, a výslednou trojici netvoří různá prvočísla.
Konečně buď $p + 3q = r$. První podmínka pak dává $p \mid p + 4q$, takže $p \mid 4q$ a $p = 2$. Druhá podmínka pak říká, že $q \mid r + 2p = 3q + 6$, tedy $q \mid 6$ a $q = 3$, neboť $q \neq p = 2$. Potom $r = p + 3q = 11$. Tato trojice také vyhovuje zadání.
Řešením úlohy jsou tři trojice prvočísel (p, q, r), a to $(5, 3, 2)$, $(2, 11, 7)$ a $(2, 3, 11)$.

6. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{cotg}^2 2y &= 1,\\ \operatorname{tg}^2 y + 2\operatorname{cotg}^2 2z &= 1,\\ \operatorname{tg}^2 z + 2\operatorname{cotg}^2 2x &= 1.\end{aligned}$$

(J. Švrček, P. Calábek)

Řešení. Pro každé přípustné φ platí

$$2\operatorname{cotg}^2 2\varphi = 2\left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi}\right)^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{cotg}^2\varphi - 2).$$

Položme $\operatorname{tg}^2 x = a$, $\operatorname{tg}^2 y = b$ a $\operatorname{tg}^2 z = c$, kde a, b, c jsou kladná reálná čísla. Danou soustavu tak převedeme na tvar

$$\begin{aligned}a + \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) &= 2,\\ b + \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right) &= 2,\\ c + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) &= 2.\end{aligned}\tag{1}$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \geqq b \geqq c$. Při takovém uspořádání plyne z předchozí soustavy rovnic

$$b + \frac{1}{b} \leqq c + \frac{1}{c} \leqq a + \frac{1}{a}$$

Protože pro každé kladné x platí $x + 1/x \geqq 2$, plyne ze soustavy (1) navíc $0 < a, b, c \leqq 1$. Funkce $f(x) = x + 1/x$ je ovšem na intervalu $(0; 1\rangle$ klesající, proto platí také nerovnost

$$a + \frac{1}{a} \leqq b + \frac{1}{b} \leqq c + \frac{1}{c}.$$

To spolu s předchozími nerovnostmi dává $a = b = c$.

Zbývá tak určit všechna $u \in (0; 1\rangle$, která vyhovují rovnici

$$u + \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = 2.$$

Po snadné úpravě obdržíme kvadratickou rovnici

$$3u^2 - 4u + 1 = 0, \quad \text{tj.} \quad (u-1)(3u-1) = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má právě dva kladné reálné kořeny $u_1 = 1$ a $u_2 = \frac{1}{3}$. S ohledem na použité substituce a periodičnost funkce tangens jsou řešením dané soustavy rovnic právě následující trojice (x, y, z) reálných čísel

$$\left(\frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k_2\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k_3\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{a} \quad \left(\pm\frac{\pi}{6} + k_1\pi, \pm\frac{\pi}{6} + k_2\pi, \pm\frac{\pi}{6} + k_3\pi\right),$$

kde k_1, k_2, k_3 jsou libovolná celá čísla a tři znaménka v trojici druhého typu jsou vybrána libovolně, tj. navzájem nezávisle.