Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *V oboru reálných čísel řešte rovnici*

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

víte-li, že má čtyři různé reálné kořeny, přičemž součet dvou z nich je roven číslu 1.

Řešení. Označme hledané kořeny x_1, x_2, x_3, x_4 tak, aby platilo $x_1+x_2 = 1$. Potom

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Porovnáním koeficientů u odpovídajících mocnin x dostaneme známé Viètovy vztahy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \tag{1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -\frac{7}{4}, \tag{2}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{11}{2}, \tag{3}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{7}{2}. \tag{4}$$

Protože $x_1 + x_2 = 1$, z (1) plyne $x_3 + x_4 = 2$. Rovnice (2) a (3) přepíšeme do tvaru

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{7}{4},$$
$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -\frac{11}{2},$$

což po dosazení hodnot $x_1 + x_2 = 1$ a $x_3 + x_4 = 2$ dává

$$x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{15}{4},$$
$$2x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{11}{2}.$$

Z této soustavy dvou lineárních rovnic již snadno dostaneme

$$x_1x_2 = -\frac{7}{4}, \qquad x_3x_4 = -2.$$

Všimněme si, že pro tyto hodnoty součinů x_1x_2 a x_3x_4 je splněna i rovnice (4), kterou jsme dosud nevyužili. Z podmínek $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = -\frac{7}{4}$ vyplývá, že x_1 a x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - x - \frac{7}{4} = 0, \qquad \text{tedy } x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}.$$

Podobně z podmínek $x_3 + x_4 = 2$ a $x_3x_4 = -2$ dostaneme

$$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Zkoušku nalezených kořenů není třeba provádět, protože je splněna, jak jsme zdůraznili, celá soustava rovnic (1) až (4).

Závěr. Daná rovnice má kořeny $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$, $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$.

Jiné řešení. Z podmínek úlohy plyne, že levá strana rovnice je součinem mnohočlenů

$$x^2 - x + p \qquad \text{a} \qquad 4x^2 + qx + r,$$

kde p, q a r jsou reálná čísla. Po jejich vynásobení a porovnání koeficientů u odpovídajících mocnin x dostaneme soustavu čtyř rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} q - 4 &= -12, \\ 4p - q + r &= -7, \\ pq - r &= 22, \\ pr &= 14. \end{aligned}$$

První tři rovnice mají jediné řešení $r = -8$, $p = -\frac{7}{4}$ a $q = -8$, které vyhovuje i čtvrté rovnici. Platí tedy rozklad

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = \left(x^2 - x - \frac{7}{4}\right)(4x^2 - 8x - 8).$$

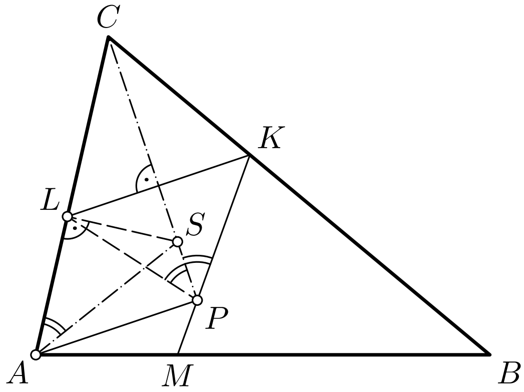
Rovnice $x^2 - x - \frac{7}{4} = 0$ má kořeny $\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$, rovnice $4x^2 - 8x - 8 = 0$ má kořeny $1 \pm \sqrt{3}$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Uvažujme rovnici
$$x^5 - 9x^4 + kx^3 - 3x^2 - \frac{92}{3}x + 20 = 0,$$
kde k je reálný parametr. Určete všechny její kořeny a hodnotu parametru k, víte-li, že tato rovnice má aspoň dva reálné kořeny, které se liší pouze znaménkem. [Využijte Viètovy vztahy, kořeny jsou $\pm 2\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 3, 5$, $k = \frac{65}{3}$.]
2. Nechť P, Q jsou kvadratické mnohočleny takové, že čísla -22, 7, 13 jsou tři z kořenů rovnice $P(Q(x)) = 0$. Určete čtvrtý kořen této rovnice. [49–A–I–1]
3. Nechť P je kvadratický trojčlen. Určete všechny kořeny rovnice
$$P(x^2 + 4x - 7) = 0,$$
víte-li, že mezi nimi je číslo 1 a aspoň jeden kořen je dvojnásobný. [49–A–II–1]

2. *Kružnice vepsaná danému trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech K, L, M. Označme P průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přímkou MK. Dokažte, že přímky AP a LK jsou rovnoběžné.*

Řešení. Označme k kružnici vepsanou trojúhelníku ABC a S její střed. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem α, β, γ. Protože body K, L jsou souměrně sdruženy podle osy vnitřního úhlu při vrcholu C, jsou přímky KL a CP na sebe kolmé a platí $|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle KPC|$ (obr. 1).



Obr. 1

Vyjádříme-li velikosti vnitřních úhlů při základnách KM a LK v rovnoramenných trojúhelnících KMB a LKC, dostaneme $|\sphericalangle MKB| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle LKC| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$. Z přímosti úhlu BKC tak plyne $|\sphericalangle MKL| = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Analogicky vyjde $|\sphericalangle KLM| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle LMK| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$.

Protože $|\sphericalangle KPC| + \frac{1}{2}\gamma = |\sphericalangle BKP| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, dostaneme pro velikost souměrně sdružených úhlů LPC a KPC rovnost

$$|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle KPC| = 90° - \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Kružnice k vepsaná trojúhelníku ABC je současně kružnicí opsanou trojúhelníku KLM, který je, jak jsme zjistili výpočtem jeho úhlů, ostroúhlý. Její střed S je proto vnitřním bodem tohoto trojúhelníku, a tedy i vnitřním bodem úsečky CP. Protože

$$|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle LPS| = |\sphericalangle LAS| = \frac{\alpha}{2},$$

je $APSL$ tětivový čtyřúhelník. Vzhledem k tomu, že úhel ALS je pravý, je i úhel APS pravý (přímky AP a CP jsou na sebe kolmé), a proto jsou přímky KL a AP rovnoběžné. Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Protože kružnice k je opsaná trojúhelníku KLM, můžeme jeho vnitřní úhly snadno vyjádřit z příslušných středových úhlů: $|\sphericalangle KSL| = 180° - \gamma$, takže $|\sphericalangle KML| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$ atd.

Návodné a doplňující úlohy:

1. V rovině je dán čtverec $ABCD$. Uvnitř jeho stran BC, CD jsou po řadě zvoleny body P, Q takové, že $|\sphericalangle PAQ| = 45°$. Označme dále R, S průsečíky jeho úhlopříčky BD po řadě s přímkami AP, AQ. Dokažte, že body P, Q, R, S leží na téže kružnici. [Ukažte, že úhly PSQ a PRQ jsou pravé.]
2. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad průměrem AD a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte. [52–B–II–4]
3. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a dále N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici. [53–A–III–5]

3. *Jsou-li x, y, z reálná čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ splňující podmínku $xy + yz + zx = 1$, pak platí*

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leqq 1 + (x+y+z)^2.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

Řešení. Pro libovolná reálná čísla $x, y, z \in \langle -1, 1\rangle$ platí $1 - x^2 \geqq 0$, $1 - y^2 \geqq 0$, $1 - z^2 \geqq 0$. Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro trojici nezáporných reálných čísel $1 - x^2$, $1 - y^2$, $1 - z^2$ tak dostaneme

$$\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leqq \frac{(1-x^2)+(1-y^2)+(1-z^2)}{3} = \\ = \frac{3-(x^2+y^2+z^2)}{3},$$

takže

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leqq 6 - 2(x^2+y^2+z^2). \tag{1}$$

Vyhovují-li reálná čísla $x, y, z \in \langle -1, 1\rangle$ podmínce $xy + yz + zx = 1$, ukážeme, že splňují také nerovnost

$$6 - 2(x^2+y^2+z^2) \leqq 1 + (x+y+z)^2. \tag{2}$$

Pravou stranu této nerovnosti upravíme na tvar

$$1 + x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 3 + (x^2+y^2+z^2),$$

což po dosazení do (2) vede k ekvivalentní nerovnosti

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq 1.$$

Její platnost ověříme snadno. Stačí totiž dokázat, že pro reálná čísla x, y, z, která vyhovují podmínkám úlohy, platí nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq xy + yz + zx,$$

což je však ekvivalentní nerovnosti

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqq 0,$$

která platí pro všechna reálná čísla x, y, z.

Závěr. Nerovnost, kterou jsme měli dokázat, vyplývá z dokázaných nerovností (1) a (2). Rovnost v ní přitom nastane, právě když nastane současně v obou zmíněných nerovnostech. To nastane, právě když $x=y=z$, což s ohledem na podmínku $xy+yz+$ $+zx=1$ dává pouze dvě možnosti $x=y=z=\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$, pro něž v dokázané nerovnosti platí rovnost.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Pro libovolná reálná čísla a, b, c platí nerovnost
$$3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2.$$
Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. [Upravte danou nerovnost tak, aby na jedné straně byl součet tří druhých mocnin reálných čísel a na druhé straně nula.]
2. Dokažte, že pro libovolná tři nezáporná čísla x, y, z platí nerovnost
$$x(x-\sqrt{yz})+y(y-\sqrt{zx})+z(z-\sqrt{xy}) \geqq 0.$$
Zjistěte, ve kterých případech nastane rovnost. [17–A–II–2]
3. Dokažte, že pro libovolná tři nezáporná čísla x, y, z platí nerovnost
$$(x^2+x+1)(y^2+y+1)(z^2+z+1) \geqq 27xyz.$$
[Pro každý z činitelů na levé straně nerovnosti použijte nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice nezáporných čísel.]
4. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí
$$1 \leqq a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1-a)(1-b)(1-c) \leqq 9.$$
[55–B–II–4]

4. *Určete, pro která přirozená čísla n je možno množinu $\mathsf{M}=\{1,2,\ldots,n\}$ rozdělit a) na dvě, b) na tři navzájem disjunktní podmnožiny o stejném počtu prvků tak, aby každá z nich obsahovala také aritmetický průměr všech svých prvků.*

ŘEŠENÍ. a) Označme A a B hledané podmnožiny. Protože obě mají stejný počet prvků, je počet prvků množiny M nutně sudý. Je tedy $n=2k$, kde k je vhodné přirozené číslo.

Pro $n=4$ neexistuje rozklad množiny $\mathsf{M}=\{1,2,3,4\}$ na dvě podmnožiny daných vlastností, protože aritmetický průměr libovolných dvou různých čísel z množiny M se nemůže rovnat žádnému z těchto čísel. Sestrojme vyhovující rozklad množiny M pro několik prvních sudých čísel n (aritmetický průměr prvků podmnožin vyznačíme polotučně).

$n=2$:	$\mathsf{A}=\{\mathbf{1}\}$	$\mathsf{B}=\{\mathbf{2}\}$
$n=4$:	rozklad neexistuje	
$n=6$:	$\mathsf{A}=\{1,\mathbf{2},3\}$	$\mathsf{B}=\{4,\mathbf{5},6\}$
$n=8$:	$\mathsf{A}=\{2,3,\mathbf{4},7\}$	$\mathsf{B}=\{1,\mathbf{5},6,8\}$

$n = 10$:	$\mathsf{A} = \{1, 2, \mathbf{3}, 4, 5\}$	$\mathsf{B} = \{6, 7, \mathbf{8}, 9, 10\}$
$n = 12$:	$\mathsf{A} = \{1, 2, 3, \mathbf{4}, 6, 8\}$	$\mathsf{B} = \{5, 7, \mathbf{9}, 10, 11, 12\}$

Nyní ukážeme, že hledaný rozklad množiny M existuje pro libovolné $n = 2k$ takové, že $k \neq 2$.

Pro lichá čísla k vyhovuje například rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \dots, k\}, \qquad \mathsf{B} = \{k + 1, k + 2, \dots, 2k\}.$$

Součet všech prvků množiny A je $\frac{1}{2}k(k+1)$, jejich aritmetický průměr je $\frac{1}{2}(k+1)$, což je přirozené číslo. Jelikož $1 \leqq \frac{1}{2}(k+1) \leqq k$, je aritmetický průměr všech prvků množiny A prvkem množiny A. Podobně aritmetický průměr $\frac{1}{2}(3k+1)$ všech prvků množiny B je prvkem množiny B.

Pro $k = 4$ jsme existenci rozkladu ukázali v tabulce, pro sudá čísla $k \geqq 6$ vyhovuje například rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \dots, k-2, k, \tfrac{1}{2}(3k-2)\}, \qquad \mathsf{B} = \mathsf{M} \setminus \mathsf{A}.$$

Platí $k < \frac{1}{2}(3k-2) \leqq 2k$ a $\frac{1}{2}(3k-2)$ je přirozené číslo. Množina A tedy obsahuje k přirozených čísel z množiny M. Součet všech prvků množiny A je

$$1 + 2 + \ldots + (k-2) + k + \tfrac{1}{2}(3k-2) = \tfrac{1}{2}(k-2)(k-1) + k + \tfrac{1}{2}(3k-2) = \tfrac{1}{2}k(k+2).$$

Jejich aritmetický průměr je $\frac{1}{2}(k+2)$, což je přirozené číslo. Jelikož $1 \leqq \frac{1}{2}(k+2) \leqq k-2$, je aritmetický průměr všech prvků množiny A prvkem množiny A. Obdobně ukážeme, že aritmetický průměr $\frac{3}{2}k$ všech prvků množiny B je prvkem množiny B.

Poznámka. Pro k sudé nevyhovuje například rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \dots, k-1, \tfrac{3}{2}k\}, \qquad \mathsf{B} = \mathsf{M} \setminus \mathsf{A},$$

protože průměr $\frac{3}{2}k$ všech prvků množiny B je prvkem množiny A. Vyhovuje však rozklad jiného druhu

$$\begin{aligned}\mathsf{A} &= \{1, 3, \dots, k-1\} \cup \{k, k+4\} \cup \{k+5, k+7, \dots, 2k-1\},\\ \mathsf{B} &= \{2, 4, \dots, k-2\} \cup \{k+1, k+2, k+3\} \cup \{k+6, k+8, \dots, 2k\},\end{aligned}$$

a to dokonce i pro hodnotu $k = 4$, kdy v pravých stranách těchto rovností „chybějí“ třetí skupiny prvků, jež mají obecně po $\frac{1}{2}(k-4)$ prvcích. Počet prvků takové množiny A je roven $\frac{1}{2}k + 2 + \frac{1}{2}(k-4) = k$, jejich součet je roven

$$\frac{k^2}{4} + (2k+4) + \frac{(k-4)(3k+4)}{4} = k^2,$$

takže jejich průměr je číslo $k \in \mathsf{A}$. Součet všech k prvků množiny B je roven

$$\frac{(k-2)k}{4} + (3k+6) + \frac{(k-4)(3k+6)}{4} = k^2 - 2k,$$

takže jejich průměr je číslo $k - 2 \in \mathsf{B}$.

b) Označme A, B a C hledané podmnožiny množiny M. Protože všechny mají stejný počet prvků, je číslo n nutně dělitelné třemi, je tedy tvaru $n = 3k$, kde k je vhodné přirozené číslo. Pro součet s všech prvků množiny M platí $s = \frac{1}{2}3k(3k+1)$. Součet tří aritmetických průměrů všech prvků jednotlivých množin A, B a C je pak roven s/k, tedy $\frac{3}{2}(3k+1)$. Tento součet musí být podle podmínek úlohy přirozené číslo, proto je k nutně liché.

Pro čísla $n = 3k$, kde k je liché, ukážeme, že zadání vyhovuje například rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \ldots, k\}, \quad \mathsf{B} = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\} \quad \text{a} \quad \mathsf{C} = \{2k+1, 2k+2, \ldots, 3k\}.$$

Součet všech prvků A je $\frac{1}{2}k(k+1)$, jejich aritmetický průměr je $\frac{1}{2}(k+1)$, což je přirozené číslo. Jelikož $1 \leqq \frac{1}{2}(k+1) \leqq k$, je aritmetický průměr všech prvků množiny A prvkem množiny A. Podobně ukážeme, že aritmetický průměr $\frac{1}{2}(3k+1)$ všech prvků množiny B je prvkem množiny B a aritmetický průměr $\frac{1}{2}(5k+1)$ všech prvků množiny C je prvkem množiny C.

Závěr. Podmínkám úlohy v případě a) vyhovují všechna sudá čísla n různá od 4, v případě b) všechna lichá čísla n dělitelná třemi.

Návodné a doplňující úlohy:

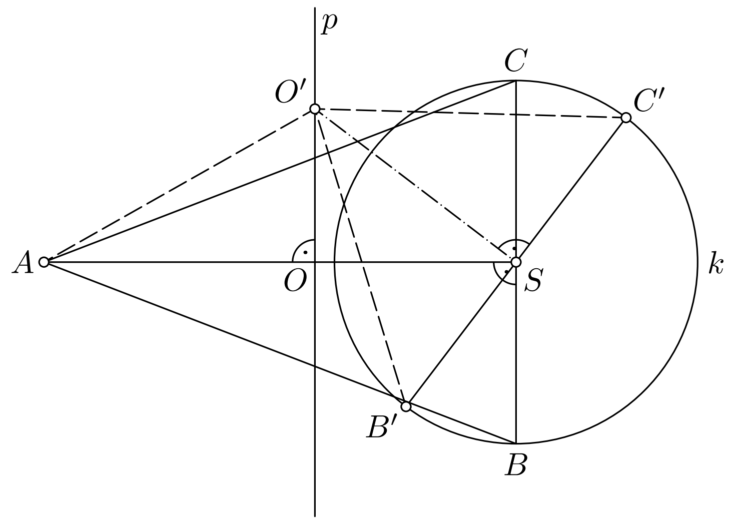
1. Na stole leží k hromádek o $1, 2, 3, \ldots, k$ kamenech, kde $k \geqq 3$. V každém kroku vybereme tři libovolné hromádky na stole, sloučíme je do jedné a přidáme k ní jeden kámen, který na stole dosud neležel. Jestliže po několika krocích vznikne jediná hromádka, není výsledný počet kamenů dělitelný třemi. Dokažte. [54–B–I–3]
2. Na stole leží 54 hromádky o 1, 2, 3, …, 54 kamenech. V každém kroku vybereme libovolnou hromádku, řekněme o k kamenech, a odebereme ji celou ze stolu spolu s k kameny z každé té hromádky, ve které je aspoň k kamenů. Například po prvním kroku, při kterém vybereme hromádku o 52 kamenech, zůstanou na stole hromádky o 1, 2, 3, …, 51, 1 a 2 kamenech. Předpokládejme, že po určitém počtu kroků zůstane na stole jediná hromádka. Zdůvodněte, kolik kamenů v ní může být. [54–B–S–1]
3. Rozhodněte, zda je možné rozložit množinu čísel $\{1, 2, \ldots, 1995\}$ na dvě podmnožiny tak, aby v první podmnožině bylo a) dvakrát, b) třikrát, c) čtyřikrát více čísel než ve druhé a aby součty čísel v obou podmnožinách byly stejné. [45–C–I–2]
4. Určete, pro která přirozená čísla n je možno rozdělit množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ na dvě podmnožiny tak, aby v první bylo třikrát více čísel než ve druhé a aby součty všech čísel v obou podmnožinách byly stejné. [45–C–II–1]

5. *V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k.*

Řešení. Poloměr dané kružnice k označme r. Leží-li bod A na kružnici k, je bod S středem kružnice opsané každého z uvažovaných trojúhelníků ABC a hledanou množinou je jednobodová množina $\{S\}$. Dále rozlišíme dva případy:

a) Nechť $|AS| > r$. Uvažujme nejprve rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC, který vyhovuje podmínkám úlohy. Střed O kružnice jemu opsané je vnitřním bodem úsečky AS a přitom platí $|AO| = |BO| = |CO|$.

Nyní ukážeme, že hledanou množinou O středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, které vyhovují podmínkám úlohy, je přímka p, která je kolmá k AS a prochází bodem O (obr. 2).



Obr. 2

Uvažujme libovolný trojúhelník $AB'C'$, kde $B'C'$ je průměr kružnice k, a označme O' průsečík osy jeho strany $B'C'$ s přímkou p, takže $|O'B'| = |O'C'|$ (bod O' leží na ose $B'C'$). Podle Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku $C'O'S$ platí

$$|O'B'| = |O'C'| = \sqrt{|O'S|^2 + r^2} = \sqrt{|OO'|^2 + |OS|^2 + r^2}.$$

Pro velikost úsečky $O'A$ přitom máme

$$|O'A| = \sqrt{|AO|^2 + |OO'|^2} = \sqrt{|BO|^2 + |OO'|^2} = \sqrt{|OS|^2 + r^2 + |OO'|^2}.$$

Odtud $|O'A| = |O'B'| = |O'C'|$, tudíž bod O' je středem kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$ a podle konstrukce leží na přímce p.

Naopak, pro libovolný bod O' přímky p lze sestrojit průměr $B'C'$ kružnice k, který je kolmý k přímce $O'S$. Z předchozích úvah vyplývá, že $|O'A| = |O'B'| = |O'C'|$, takže jsme našli trojúhelník $AB'C'$ požadovaných vlastností, jehož kružnice opsaná má střed O'.

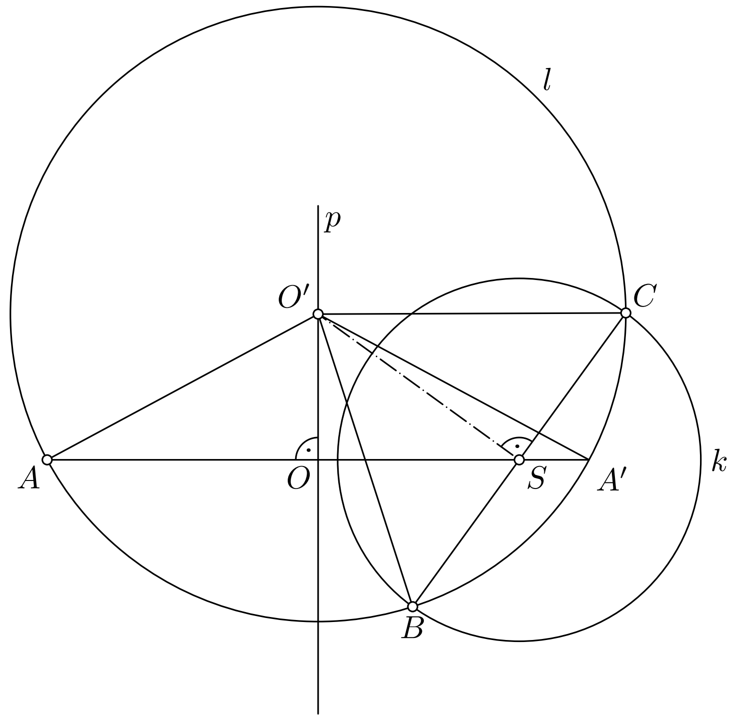
b) Nechť $|AS| < r$. V tomto případě lze postupovat analogicky. Střed O je zde vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce SA. Dojdeme přitom ke stejnému výsledku jako v případě a).

Závěr. Není-li A bodem kružnice k, je hledanou množinou O přímka p, která je kolmá k AS a současně prochází středem O kružnice opsané rovnoramennému trojúhelníku ABC se základnou BC, která je průměrem kružnice k kolmým na AS. Je-li A je bodem kružnice k, je $\mathsf{O} = \{S\}$.

Jiné řešení. Pro daný bod A, který neleží na kružnici k, uvažujme trojúhelník ABC daných vlastností. Označme l kružnici opsanou trojúhelníku ABC (obr. 3). Protože bod S je středem společné tětivy BC kružnic k a l, protne kružnice l polopřímku opačnou k polopřímce SA ve vnitřním bodě, který označíme A'. Pro mocnost $m_l(S)$ bodu S ke kružnici l přitom platí

$$m_l(S) = -|BS| \cdot |CS| = -r^2 = -|AS| \cdot |A'S|, \tag{1}$$

kde r je poloměr kružnice k. Odtud plyne, že vzdálenost $|A'S|$, a tedy i poloha bodu A' na polopřímce opačné k SA jsou jednoznačně určeny polohou bodu A. Pro všechny trojúhelníky ABC vyhovující podmínkám úlohy je tedy AA' pevná úsečka. Kružnice opsané všem uvažovaným trojúhelníkům ABC proto mají společnou tětivu AA', takže jejich středy leží na ose p úsečky AA'. V případě, kdy ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou BC, je úsečka AA' průměrem kružnice l a její střed O je současně středem úsečky AA'. Přímka p prochází tímto bodem O kolmo k přímce AS.



Obr. 3

Naopak, ke každému bodu O' přímky p najdeme trojúhelník ABC požadovaných vlastností, který má střed opsané kružnice v bodě O'. Stačí sestrojit průměr BC kružnice k, který je kolmý k přímce $O'S$. Pro pevně uvažované body A, A' a S jsme tak sestrojili body B, C, pro něž platí vztah (1). To znamená, že body A, B, C a A' leží na téže kružnici l. Vzhledem k tomu, že bod O' je průsečíkem os tětiv AA' a BC této kružnice, které nejsou rovnoběžné, je bod O' středem kružnice l, tedy středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Návodné a doplňující úlohy:

1. V rovině je dán čtverec $ABCD$. Uvažujme čtverec $KLMN$, jehož úhlopříčka je shodná se stranou čtverce $ABCD$ a jeho vrcholy K a M leží na stranách čtverce $ABCD$. Určete množinu vrcholů L všech takových čtverců $KLMN$. [19–B–I–5]

2. V rovině je dána přímka q a bod A, který na ní neleží. Určete v této rovině množinu středů S všech čtverců $ABCD$ takových, že bod B leží na přímce q. [47–B–I–2]
3. V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík výšek V a střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici. [55–A–III–4]

6. *Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna celá čísla x, y platí*

$$f\bigl(f(x)+y\bigr) = x + f(y + 2\,006).$$

Řešení. Nechť f je libovolná funkce požadovaných vlastností. Dosadíme-li do daného vztahu postupně $y = 0$ a $y = 1$, dostaneme rovnosti

$$f\bigl(f(x)\bigr) = x + f(2\,006), \quad \text{resp.} \quad f\bigl(f(x)+1\bigr) = x + f(2\,007) \tag{1}$$

a jejich odečtením

$$f\bigl(f(x)+1\bigr) - f\bigl(f(x)\bigr) = f(2\,007) - f(2\,006).$$

Poslední vztah lze zjednodušeně zapsat jako

$$f(z+1) - f(z) = f(2\,007) - f(2\,006) \tag{2}$$

pro každé takové $z \in \mathbb{Z}$, které patří do oboru hodnot funkce f. Tímto oborem je ovšem celá množina $\mathbb{Z}$, jak hned vidíme z kterékoli z rovností (1).

Rovnost (2) platná pro každé $z \in \mathbb{Z}$ znamená, že funkce f na $\mathbb{Z}$ je (oboustranně nekonečná) aritmetická posloupnost, takže její předpis musí být tvaru $f(z) = az + b$ s vhodnými konstantami $a, b \in \mathbb{R}$. Jejich možné hodnoty zjistíme, když dosadíme do obou stran rovnosti ze zadání:

$$f\bigl(f(x)+y\bigr) = a\bigl(f(x)+y\bigr) + b = a^2x + ay + ab + b,$$
$$x + f(y+2\,006) = x + a(y+2\,006) + b = x + ay + 2\,006a + b.$$

Takové dva výrazy mají tutéž hodnotu pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}$, právě když zároveň platí $a^2 = 1$ a $2\,006a = ab$, neboli $a = \pm 1$ a $b = 2\,006$. Řešením úlohy jsou tedy jediné dvě funkce určené předpisy

$$f_1(x) = x + 2\,006 \quad \text{a} \quad f_2(x) = -x + 2\,006.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je libovolná funkce splňující nerovnost
$$f(n) + f(n+2) \leqq 2f(n+1)$$
pro každé přirozené číslo n. Ukažte, že potom v rovině existuje přímka, na které leží nekonečně mnoho bodů s kartézskými souřadnicemi $[k, f(k)]$, $k \in \mathbb{N}$. [43–A–III–1]
2. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že
$$f(x) + f(y) = f(x + 2xy) + f(y - 2xy)$$
platí pro každé x, y celé a navíc $f(-1) = f(1)$. [42–A–3–5]
3. Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která je ostře rostoucí a pro každá dvě přirozená čísla m, n splňuje rovnost
$$f(mn) = f(m)f(n).$$
Určete $f(30)$, víte-li, že $f(2) = 4$. [40–A–2–4]
4. Nechť f je zobrazení množiny $\{1, 2, \ldots, 1988\}$ do sebe. Pro libovolné přirozené číslo n položme $x_1 = f(1)$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Zjistěte, zda existuje takové číslo m, že platí $x_m = x_{2m}$. [37–A–III–1]