56. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Určete všechny dvojice* (a, b) *přirozených čísel, pro něž platí*

$$a + 5\sqrt{b} = b + 5\sqrt{a}.$$

Řešení. Substitucí $m = \sqrt{a}$, $n = \sqrt{b}$ převedeme rovnici na tvar $m^2 - n^2 - 5(m - n) = 0$, odkud s pomocí vzorce pro rozdíl čtverců dostaneme $(m-n)(m+n-5) = 0$. Je tedy $m - n = 0$ nebo $m + n = 5$.

V prvním případě po zpětné substituci zjistíme, že úloze vyhovují všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž platí $b = a$. Ve druhém dostáváme $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5$. Je tedy $1 \leqq \sqrt{a}, \sqrt{b} \leqq 4$, proto stačí postupně dosazovat $a = 1, 2, \ldots, 16$ do vztahu

$$b = \left(5 - \sqrt{a}\right)^2 \tag{1}$$

a zjišťovat, zda je odpovídající číslo b přirozené.

Daná rovnice se nemění záměnou neznámých a, b. Můžeme tedy předpokládat $a \leqq b$, což spolu s rovností $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5$ znamená, že $\sqrt{a} \leqq 2{,}5$. Odtud $a \leqq 6{,}25$. Proto se stačí při dosazování omezit jen na hodnoty $a = 1, 2, \ldots, 6$ a zbylá řešení určit záměnou čísel a, b v nalezených dvojicích.

Vtipnější postup spočívá v umocnění závorky na pravé straně vztahu (1) a následné úpravě na tvar

$$\frac{25 + a - b}{10} = \sqrt{a}, \tag{2}$$

z něhož je zřejmé, že číslo a (a vzhledem k symetrii dané rovnice i číslo b) je druhou mocninou přirozeného čísla. (V opačném případě by na levé straně rovnosti (2) bylo číslo racionální, kdežto na pravé číslo iracionální.) Pak je i levá strana vztahu (2) přirozené číslo menší než pět. Odtud plyne, že rozdíl $a - b$ je lichý násobek pěti. Za předpokladu $a < b$ je tedy buď $(a, b) = (4, 9)$, nebo $(a, b) = (1, 16)$. Další dvě řešení vzniknou záměnou čísel a, b.

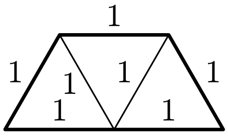
Závěr: Dané rovnici vyhovují jen dvojice $(a, b) = (1, 16), (4, 9), (9, 4), (16, 1)$ a všechny dvojice (a, a), kde a je libovolné přirozené číslo.

Úlohy k procvičení:

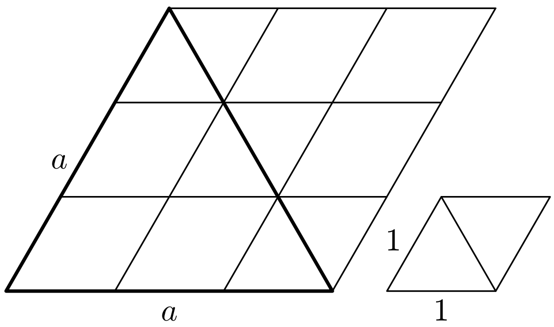
1. Součet druhých odmocnin přirozených čísel a, b je číslo přirozené, právě když jsou čísla a, b druhými mocninami přirozených čísel. Dokažte. [Je-li $r = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ kladné racionální číslo, je $\sqrt{b} = r - \sqrt{a}$, takže $b = r^2 - 2r\sqrt{a} + a$ a $\sqrt{a} = (r^2 + a - b)/2r$. Odmocnina $\sqrt{a}$ jako racionální odmocnina přirozeného čísla je tudíž celočíselná, což vzhledem k symetrii použitého vztahu platí i pro odmocninu $\sqrt{b}$.]
2. Najděte všechny dvojice (x, y) přirozených čísel, pro které platí
$$y\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 4y + 12 = 0.$$
[Řešením jsou všechny dvojice $(16, n)$ a $(n, 3)$, kde $n \in \mathbb{N}$.]
3. Najděte všechny dvojice a, b nezáporných reálných čísel, pro které platí
$$\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{b^2 + a} = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a + b}.$$
[48–C–S–1]

2. *Najděte všechny trojúhelníky, které lze rozřezat na lichoběžníky se stranami délek 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm.*

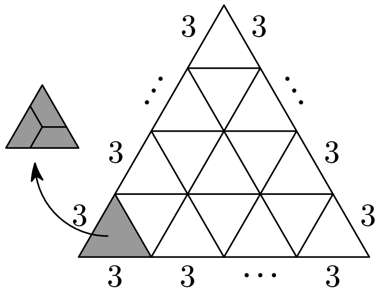
Řešení. Lichoběžníky se stranami délek 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm jsou všechny navzájem shodné a skládají se ze tří rovnostranných trojúhelníků (obr. 1a). (Základny každého lichoběžníku mají dvě různé délky, v našem případě to musí být 2 cm a 1 cm.) Budeme je nazývat *základní lichoběžníky.* Rovnostranný trojúhelník s délkou strany 1 cm nazveme *základní trojúhelník.*



Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 2

Vidíme, že každý z hledaných trojúhelníků lze rozřezat na konečný počet základních trojúhelníků. Proto jsou velikosti jeho vnitřních úhlů násobky šedesáti stupňů. Vnitřní úhly každého trojúhelníku jsou tři a součet jejich velikostí je $180°$, má tedy smysl hledat jen trojúhelníky rovnostranné. Z podmínky rozřezání na konečný počet základních trojúhelníků dále plyne, že délka strany hledaného trojúhelníku vyjádřená v centimetrech je přirozené číslo. Označíme-li ji a, lze náš trojúhelník rozřezat právě na a^2 základních trojúhelníků. To lze odvodit například vydělením jeho obsahu $S_a = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ a obsahu $S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ základního trojúhelníku. Obecněji platí: dva trojúhelníky, které jsou podobné s koeficientem k, mají obsahy v poměru k^2.

Jiné odvození počtu základních trojúhelníků v rovnostranném trojúhelníku se stranou a cm plyne z doplnění trojúhelníku na kosočtverec podle obr. 1b, kde bylo zvoleno $a = 3$. Kosočtverec je složen ze dvou rovnostranných trojúhelníků se stranou délky a cm. Lze jej tedy rozřezat na a^2 kosočtverců (jeden je zobrazen v pravé dolní části obrázku), z nichž každý je složen ze dvou základních trojúhelníků a kterým rovněž budeme říkat základní. Odtud plyne, že rovnostranný trojúhelník obsahuje stejný počet základních trojúhelníků, jako jemu příslušný kosočtverec obsahuje základních kosočtverců.

Zjistili jsme, že každý z hledaných trojúhelníků je rovnostranný se stranou délky a cm ($a \in \mathbb{N}$) a že je složen z a^2 základních trojúhelníků. Protože každý základní lichoběžník obsahuje právě tři základní trojúhelníky, musí být číslo a^2, a tedy i číslo a dělitelné třemi. Z obr. 2 pak plyne, že každý rovnostranný trojúhelník se stranou délky $3n$ cm, kde $n = 1, 2, \ldots$, lze rozřezat na základní lichoběžníky.

Závěr: Podmínkám úlohy vyhovují jen rovnostranné trojúhelníky s délkou strany $a = 3n$ cm, kde n je přirozené číslo.

Úlohy k procvičení:

1. Daný rovnostranný trojúhelník rozdělte na: a) 18, b) 19, c) 20 rovnostranných, ne nutně shodných trojúhelníků. [41–Z7–II–1]
2. Rozdělte čtverec se stranou délky 12 cm na tři obdélníky s co nejmenšími stejnými obvody. [49–Z6–I–2]

3. Určete všechny čtverce, které se dají beze zbytku rozřezat na T-tetramina (obrazce  složené ze čtyř jednotkových čtverců). [41–Z8–I–6]

3. *Najděte všechna přirozená čísla, jejichž zápis neobsahuje nulu a má následující vlastnost: vynecháme-li v něm libovolnou číslici, dostaneme číslo, které je dělitelem původního čísla.*

Řešení. Hledané číslo n obsahuje aspoň dvě cifry. Zapišme je ve tvaru $n = 10a + b$, kde a je číslo, jež vznikne škrtnutím poslední číslice b čísla n. Podle zadání platí $a \mid 10a + b$. Odtud $a \mid b$. Uvážíme-li navíc, že $b \neq 0$, musí být a jednociferné číslo, takže n je dvojciferné s nenulovými číslicemi a, b, přičemž $b = ka$, $k \in \mathbb{N}$.

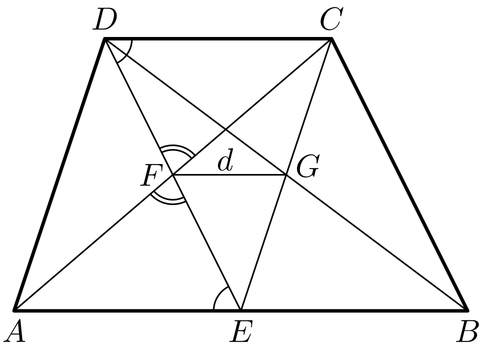
Škrtneme-li číslici a v čísle n, zůstane číslo b, které musí dělit původní číslo $n = 10a + b$, z čehož postupně dostáváme $b \mid 10a$, $ka \mid 10a$, $k \mid 10$ a odtud $k \in \{1, 2, 5\}$. Dosazením do $b = ka$ dostaneme tři možné případy $b = a$, $b = 2a$ a $b = 5a$ a v každém z nich snadno určíme vyhovující dvojice číslic a, b. Tak zjistíme, jak musejí hledaná čísla $n = 10a + b$ vypadat.

Závěr: Řešením úlohy jsou čísla: 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88 a 99. Zkouškou se přesvědčíme, že všechna vyhovují podmínkám úlohy.

Úlohy k procvičení:

1. Najděte všechna celá čísla od 1 do 1 000 000, které se škrtnutím první číslice 73krát zmenší. [Vyhovují čísla 9 125, 91 250, 912 500; 45–Z7–I–3]
2. Před dané trojciferné číslo napíšeme jeho osminásobek. Vznikne šesticiferné nebo osmiciferné číslo. (Například pro číslo 103 vznikne číslo 824 103.) Ukažte, že vzniklé číslo je ve všech případech dělitelné aspoň třemi různými prvočísly. [41–Z8–III–3]

4. *Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme E střed strany AB, F střed úsečky DE a G průsečík úseček BD a CE. Vyjádřete obsah lichoběžníku $ABCD$ pomocí jeho výšky v a délky d úsečky FG za předpokladu, že body A, F, C leží v přímce.*



Obr. 3

Řešení. Podle zadání jsou úhly EFD a AFC přímé, takže platí (obr. 3)

$$|\sphericalangle CDF| = |\sphericalangle AEF| \quad \text{(úhly střídavé)},$$
$$|\sphericalangle CFD| = |\sphericalangle AFE| \quad \text{(úhly vrcholové)}.$$

Navíc bod F půlí úsečku DE, proto $|DF| = |EF|$ a trojúhelníky CDF a AEF jsou shodné podle věty *usu*. Odtud plyne $|CD| = |AE|$, což spolu s rovností $|AE| = |EB|$

vede k závěru, že EB a DC jsou dvě shodné a rovnoběžné úsečky. To znamená, že čtyřúhelník $EBCD$ je rovnoběžník. Průsečík G jeho úhlopříček proto půlí každou z nich. Body F a G jsou středy stran AC, EC trojúhelníku AEC, takže úsečka FG je jeho střední příčkou a $|AE| = 2|FG|$. Platí proto:

$$|AB| = 2|AE| = 4d \quad \text{a} \quad |CD| = |AE| = 2d.$$

Obsah lichoběžníku $ABCD$ je $S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)v = 3dv$.

Úlohy k procvičení:

1. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme písmeny K, L, M a N po řadě středy stran AB, BC, CD a DA. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžník. Pro které čtyřúhelníky $ABCD$ je $KLMN$ čtverec?
2. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány délky 9 cm a 12 cm jeho úhlopříček, délka 8 cm jeho střední příčky a vzdálenost 2 cm středů úhlopříček. [50–C–I–2]

5. *Zjistěte, pro které přirozené číslo n je podíl*

$$\frac{33\,000}{(n-4)(n+1)}$$

a) co největší, b) co nejmenší přirozené číslo.

Řešení. Platí $33\,000 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$ a $(n+1) - (n-4) = 5$. Protože pro každé přirozené n je hodnota $n+1$ kladná, daný podíl je kladný, jen když je kladná i hodnota $n-4$, odtud $n \geqq 5$.

a) Pro každé přirozené $n \geqq 5$ platí $n - 4 \geqq 1$ a $n + 1 \geqq 6$, proto je největší hodnota daného podílu rovna $33\,000 : (1 \cdot 6) = 5\,500$ a dosáhneme ji pro $n = 5$.

b) Při hledání nejmenšího podílu označme jako a, b čísla $n+1$, $n-4$ v pořadí, které teprve upřesníme. Předpokládejme nejprve, že rozklad čísla ab na součin prvočinitelů obsahuje prvočísla 11 a 5. Pak jsou a, b po sobě jdoucí násobky pěti a právě jedno z nich, dejme tomu a, je násobkem čísla 55.

Uvažujme nejprve $a = 55$. Ze dvou možných hodnot $b = 50$ a $b = 60$ vybereme tu větší (abychom dostali menší hodnotu zkoumaného podílu). Hodnotě $b = 60$ z rovnosti $n + 1 = 60$ (nebo rovnosti $n - 4 = 55$) odpovídá $n = 59$ a zkoumaný podíl je pak roven číslu 10.

Pro $a = 110$ (resp. $a = 165$) není číslo 33 000 dělitelné žádným ze sousedních násobků pěti, tedy čísly 105 a 115 (resp. 160 a 170).

Pro další (větší) násobky a čísla 55 dostáváme $ab \geqq 215 \cdot 220 > 33\,000$.

Neobsahuje-li rozklad čísla ab na součin prvočinitelů prvočíslo 11 nebo prvočíslo 5, je zkoumaný podíl (za předpokladu, že je celočíselný) dělitelný číslem 11 resp. číslem 125, takže je to číslo větší než hodnota 10, kterou jsme nalezli dříve.

Závěr: Největší hodnota daného podílu je 5 500 pro $n = 5$ a nejmenší je 10 pro $n = 59$.

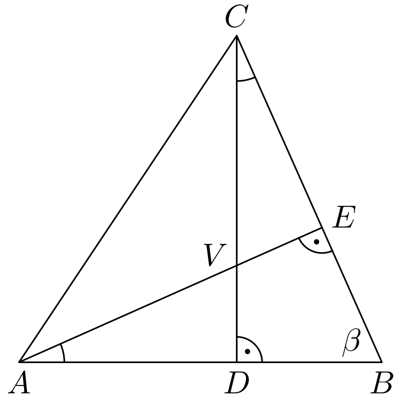
Úlohy k procvičení:

1. Z (ne nutně všech) číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 utvořte co největší číslo s různými ciframi tak, aby bylo dělitelné 72. [98 653 104; 42–Z6–I–2]
2. V čísle 71 839 664 518 nahraďte některé cifry čtyřkami tak, aby vzniklo co nejmenší číslo dělitelné 18. [41 434 444 548; 48–Z7–I–1]

6. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž D je pata výšky z vrcholu C a V průsečík výšek. Dokažte, že $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$, právě když $|CD| = |AB|$.*

Řešení. Při označení podle obr. 4 platí:

$$|\sphericalangle ADV| = |\sphericalangle CDB| = 90^\circ,$$
$$|\sphericalangle VAD| = |\sphericalangle BAE| = 90^\circ - \beta = |\sphericalangle BCD|.$$



Obr. 4

Jsou tedy trojúhelníky ADV a CDB podobné podle věty *uu*. Z této podobnosti plyne

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|VD|}{|BD|}$$

a odtud $|AD| \cdot |BD| = |CD| \cdot |VD|$. Zdůrazněme, že tato rovnost platí pro každý ostroúhlý trojúhelník ABC. Vztah $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$ ze zadání úlohy tedy platí, právě když $|CD| = |AB|$.

Úlohy k procvičení:

1. Úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě F. Dokažte, že strany BC a AD jsou rovnoběžné, právě když $|AE| \cdot |BE| = |CE| \cdot |DE|$.
2. Nechť V je průsečík výšek trojúhelníku ABC a A', B', C' paty jeho výšek z vrcholů A, B, C. Dokažte, že platí: $|AV| \cdot |A'V| = |BV| \cdot |B'V| = |CV| \cdot |C'V|$.
3. Nechť AC je delší úhlopříčka rovnoběžníku $ABCD$ a body E a F jsou paty kolmic z vrcholu C na přímky AB a AD. Dokažte, že platí $|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC|^2$. [Návod: Označte G patu kolmice z bodu B na úsečku AC a dokažte nejprve podobnost trojúhelníků ABG, ACE a podobnost trojúhelníků CBG, ACF.]

Na závěr uvádíme seznam literatury vhodné k dalšímu studiu:

K úlohám 1, 3 a 5:

Sedláček, J.: *Co víme o přirozených číslech*, edice Škola mladých matematiků, sv. 2, Mladá fronta, Praha 1961, 1963 a 1977.

Veselý, F.: *O dělitelnosti čísel celých*, edice Škola mladých matematiků, sv. 14, Mladá fronta, Praha 1977.

Znám, Š.: *Teória čísel*, Alfa, Bratislava 1977.

K úlohám 4 a 6:

Šedivý, J.: *Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách*, edice Škola mladých matematiků, sv. 46, Mladá fronta, Praha 1980.

Kuřina, F.: *Umění vidět v matematice*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1989.

Kuřina, F.: *10 pohledů na geometrii*, Matematický ústav Akademie věd České republiky, Praha 1996.

Kuřina, F.: *10 geometrických transformací*, Prometheus, Praha 2002.

K úloze 2:

Hejný, M., Niepel, Ľ.: *Šestnásť matematických príbehov*, Mladé letá, Bratislava 1983.

Další vhodná literatura a užitečné internetové adresy:

Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: *Metody řešení matematických úloh I*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1990.

Hecht, T., Sklenáriková, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh*, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1992.

Stránky české MO: http://www.math.muni.cz/mo

Stránky slovenské MO: http://matematika.webpark.sk

Časopis Mathematical Excalibur (anglicky): http://www.math.ust.hk/excalibur