56. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. Určete všechna reálná čísla s, pro něž má rovnice

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 0$$

čtyři různé reálné kořeny, přičemž součin dvou z nich je roven číslu -2.

2. Uvažujme množinu $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$ a všechny její tříprvkové podmnožiny. Rozhodněte, zda je více těch, které mají součin svých prvků větší než 2 006, nebo těch, které mají součin svých prvků menší než 2 006.

3. Je dán lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem při vrcholu A a základnou AB, v němž platí $|AB| > |CD| \geqq |DA|$. Označme S průsečík os jeho vnitřních úhlů při vrcholech A, B a T průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech C, D. Podobně označme U, V průsečíky os vnitřních úhlů při vrcholech A, D, resp. B, C.

a) Ukažte, že přímky UV a AB jsou rovnoběžné.

b) Dokažte, že průsečík E polopřímky DT s přímkou AB a body S, T, B leží na téže kružnici.

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 5. prosince 2006

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Předpokládejme, že číslo s vyhovuje zadání úlohy, a označme kořeny x_1, x_2, x_3, x_4 dané rovnice tak, aby platilo

$$x_1x_2 = -2. \tag{0}$$

Z rozkladu na kořenové činitele

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

po roznásobení a porovnání koeficientů u stejných mocnin x dostaneme Viètovy vztahy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \tag{1}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{s}{4}, \tag{2}$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{11}{2}, \tag{3}$$
$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Z rovností (0) a (4) ihned plyne

$$x_3x_4 = \frac{1}{4}.$$

Z rovnosti (3) upravené do tvaru

$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -\frac{11}{2}$$

po dosazení hodnot x_1x_2 a x_3x_4 vychází rovnice

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2) - 2(x_3 + x_4) = -\frac{11}{2},$$

která spolu s rovnicí (1) tvoří soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé součty $x_1 + x_2$ a $x_3 + x_4$. Snadným výpočtem zjistíme, že řešením této soustavy je dvojice hodnot

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \text{a} \quad x_3 + x_4 = 3.$$

Dosadíme-li vše zjištěné do rovnosti (2) upravené do tvaru

$$x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = \frac{s}{4},$$

zjistíme, že nutně $s = 17$.

Nyní musíme provést zkoušku: z rovností

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \text{a} \quad x_1x_2 = -2$$

vyplývá, že čísla $x_{1,2}$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - 2x - 2 = 0, \quad \text{tedy} \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}; \tag{5}$$

z rovností

$$x_3 + x_4 = 3 \quad \text{a} \quad x_3x_4 = \frac{1}{4}$$

zase plyne, že čísla $x_{3,4}$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0, \quad \text{tedy} \quad x_{3,4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}. \tag{6}$$

Vidíme, že $x_{1,2,3,4}$ jsou skutečně čtyři navzájem různá reálná čísla, která splňují soustavu rovnic (1)–(4) pro hodnotu $s = 17$, takže to jsou kořeny rovnice ze zadání. Zdůrazněme, že zadáním úlohy nebylo tyto kořeny vypočítat. Nestačilo by ovšem jen ověřit, že každá z kvadratických rovnic v (5) a (6) má dva různé reálné kořeny (to nastane, právě když jejich diskriminanty jsou kladná čísla), kromě toho by bylo nutné ještě ukázat, že tyto dvě rovnice nemají společný kořen.

Hledané číslo s je jediné a má hodnotu $s = 17$.

Jiné řešení. Označme $x_{1,2}$ ty kořeny dané rovnice, pro něž má platit $x_1x_2 = -2$. Mnohočlen z levé strany rovnice je dělitelný mnohočlenem $(x - x_1)(x - x_2)$, tedy mnohočlenem tvaru $x^2 + px - 2$ (kde $p = -x_1 - x_2$), platí tudíž rozklad

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = (x^2 + px - 2)(4x^2 + qx + r).$$

Roznásobením a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu

$$-20 = 4p + q,\ \ s = -8 + pq + r,\ \ 22 = -2q + pr,\ \ -2 = -2r.$$

Ze čtvrté rovnice máme $r = 1$, po dosazení do třetí $22 = -2q + p$, což spolu s první rovnicí dává $p = -2$ a $q = -12$. Ze zbylé (druhé) rovnice pak určíme hodnotu $s = 17$. Víme, že pro ni má mnohočlen ze zadané rovnice rozklad

$$4x^4 - 20x^3 + 17x^2 + 22x - 2 = (x^2 - 2x - 2)(4x^2 - 12x + 1),$$

zbývá provést zkoušku (stejně jako při prvním postupu).

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za nalezení hodnoty $s = 17$, přitom 1 bod za nalezení obou trojčlenů s kořeny $x_{1,2}$ resp. $x_{3,4}$ a 1 bod za zkoušku. Pokud řešitel pouze správně vypíše soustavu Viètových vztahů (a z ní případně ještě určí hodnotu součinu x_3x_4), udělte 2 body.

2. Uvažovaná množina je množinou právě *všech (přirozených) dělitelů* čísla $160 = 2^5 \cdot 5$. Její prvky můžeme sdružit do dvojic tak, aby součin čísel v každé dvojici byl roven číslu 160:

$$1 \cdot 160 = 2 \cdot 80 = 4 \cdot 40 = 5 \cdot 32 = 8 \cdot 20 = 10 \cdot 16.$$

To znamená, že je-li $A = \{a, b, c\}$ trojice navzájem různých dělitelů čísla 160, je i $A' = \{160/a, 160/b, 160/c\}$ trojice navzájem různých dělitelů čísla 160.

Součin abc prvků trojice A se dá vyjádřit ve tvaru

$$2^k 5^l, \quad \text{kde } k \in \{0,1,2,\dots,14\},\ l \in \{0,1,2,3\} \tag{1}$$

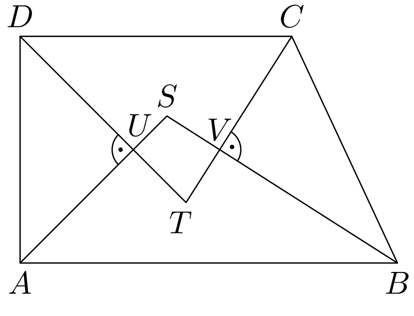
(číslo 160 má jen dva dělitele, jež jsou násobkem 2^5, proto se v rozkladu součinu abc nemůže objevit 2^{15}). Není těžké zjistit, že největší přirozené číslo tvaru (1), které je menší než 2 006, je číslo $2\,000 = 2^4 \cdot 5^3$ a nejmenší přirozené číslo, které je tvaru (1) a je větší než 2 006, je číslo $2\,048 = 2^{11}$ (samo číslo 2 006 tvaru (1) není). Přitom $2\,000 \cdot 2\,048 = 160^3$.

Je-li tedy součin prvků trojice A menší než 2 006, je nutně $abc \leqq 2\,000$ a součin $160^3/(abc)$ prvků odpovídající trojice A' je nejméně $160^3/2\,000 = 2\,048$. Naopak, je-li součin prvků trojice A větší než číslo 2 006, je $abc \geqq 2\,048$ a součin prvků trojice A' je nejvýše $160^3/2\,048 = 2\,000$. Jinými slovy *tříprvkových podmnožin se součinem prvků menším než* 2 006 *je právě tolik jako tříprvkových podmnožin se součinem prvků větším než* 2 006.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za zjištění, že uvažovaná množina je množinou dělitelů čísla 160, další 2 body za následné párování tříprvkových podmnožin. Uvede-li řešitel fakt $abc \notin \langle 2\,001, 2\,047\rangle$ bez důkazu, není to na závadu (celá čísla z tohoto intervalu lze na prvočinitele rychle jednotlivě otestovat). Protokol, ve kterém se žák pouze zabývá otázkou, jakých konkrétních hodnot může součin abc nabývat (ne však kolikrát se tak pro jednotlivé hodnoty stane), oceňte nejvýše 2 body.

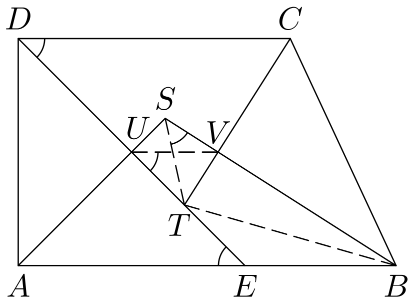
3. Bod U jako průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech A a D daného lichoběžníku má stejnou vzdálenost od stran AB, AD a zároveň i od stran AD, DC. To znamená, že má stejnou vzdálenost od obou základen AB, CD lichoběžníku $ABCD$. Podobně i bod V, který je průsečíkem os úhlů při vrcholech B a C, má od obou základen stejnou vzdálenost. Jsou tedy přímky UV a AB rovnoběžné. Tím je vyřešena část a).

Protože součet vnitřních úhlů jak při vrcholech A a D, tak při vrcholech B a C je $180°$, je součet úhlů přilehlých straně AD trojúhelníku ADU roven $90°$ stejně jako součet úhlů přilehlých straně BC trojúhelníku BCV. To znamená, že oba uvedené trojúhelníky jsou pravoúhlé (s pravým úhlem při vrcholu U, resp. V, obr. 1). Čtyřúhelník $UTVS$ je tedy tětivový (z předpokladu úlohy $|AB| > |CD| \geqq |DA|$ plyne, že polopřímky AU a CV se neprotínají, body S a T proto leží v opačných polorovinách určených přímkou UV a body U, T, V, S leží na kružnici v uvedeném pořadí).

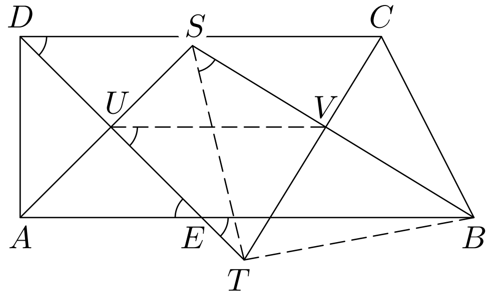


Obr. 1

Jak už víme, jsou přímky UV, AB a CD rovnoběžné, je tedy $|\sphericalangle VUT = |\sphericalangle CDT| = 45°$. Z rovnosti obvodových úhlů nad stranou TV tětivového čtyřúhelníku $UTVS$ tak plyne $|\sphericalangle VST| = |\sphericalangle VUT| = 45°$. To je zároveň i velikost obvodového úhlu TSB příslušného tětivě TB kružnice opsané trojúhelníku STB (obr. 2). Zbývá ukázat, že na téže kružnici leží i bod E. To je zřejmé, pokud $E = T$. V opačném případě stačí zjistit, že velikost úhlu TEB je $180° - 45°$ nebo $45°$ podle toho, zda přímka BT body S, E odděluje či nikoli, což okamžitě plyne z toho, že přímka DT svírá se základnou AB úhel $45°$ (obr. 2 a 3). Tím je vyřešena část b).



Obr. 2



Obr. 3

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za důkaz rovnoběžnosti $UV \parallel AB$, dále 1 bod za objev pravých úhlů AUD a BVC a 1 bod za důsledek, že čtyřúhelník $UTVS$ je tětivový. Nelze čekat, že žáci použijí charakterizaci cykličnosti čtyř bodů pomocí orientovaných úhlů přímek, jejich řešení by tedy mělo pamatovat přinejmenším na dvě možné vzájemné polohy bodů E a T (opominutí triviálního případu $E = T$ ztrátou bodu netrestejte). Pokud bude důkaz proveden jen pro jednu z možných poloh, strhněte 1 bod.