56. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Zjistěte, jaký je nejmenší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož výšky vyhovují nerovnostem $v_a \geqq 3\,\mathrm{cm}$, $v_b \geqq 4\,\mathrm{cm}$, $v_c \geqq 5\,\mathrm{cm}$.

2. Nechť a, b jsou reálná čísla. Má-li rovnice

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$$

dva různé reálné kořeny takové, že jejich součet se rovná jejich součinu, pak platí $a + b > 0$ a přitom daná rovnice nemá žádné jiné reálné kořeny. Dokažte.

3. Nechť M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme S, S_1, S_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC, AMC, BMC.

a) Dokažte, že body M, C, S_1, S_2 a S leží na téže kružnici.

b) Pro kterou polohu bodu M má tato kružnice nejmenší poloměr?

4. Nechť p, q ($p < q$) jsou daná přirozená čísla. Určete nejmenší přirozené číslo m s vlastností: Součet všech zlomků v základním tvaru, které mají jmenovatel m a jejichž hodnoty leží v otevřeném intervalu (p, q), je aspoň $56(q^2 - p^2)$.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 23. ledna 2007

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh krajského kola kategorie A

1. Označme a, b, c velikosti stran trojúhelníku ABC. Pro jeho výšku v_b platí nerovnost

$$c \geqq v_b,$$

neboť v_b je délka nejkratší úsečky spojující vrchol B s bodem přímky AC. Pro obsah S trojúhelníku ABC tak platí:

$$S = \frac{cv_c}{2} \geqq \frac{v_b v_c}{2} \geqq 10\,\mathrm{cm}^2.$$

Pokud existuje trojúhelník ABC vyhovující podmínkám úlohy, jehož obsah je právě $10\,\mathrm{cm}^2$, potom v obou nerovnostech $S = \frac{1}{2}cv_c \geqq \frac{1}{2}v_b v_c \geqq 10\,\mathrm{cm}^2$ nastává rovnost. Vychází tedy $c = v_b = 4\,\mathrm{cm}$ a současně $v_c = 5\,\mathrm{cm}$. Z první rovnosti plyne, že takový trojúhelník musí být pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A. Pro délku jeho odvěsny AC pak platí $b = v_c = 5\,\mathrm{cm}$ a délka a jeho přepony BC je rovna $\sqrt{41}\,\mathrm{cm}$. Ze vzorce $S = \frac{1}{2}av_a$ pro jeho výšku v_a plyne

$$v_a = \frac{2S}{a} = \frac{20}{\sqrt{41}}\,\mathrm{cm} > 3\,\mathrm{cm}.$$

Pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami $b = 5\,\mathrm{cm}$ a $c = 4\,\mathrm{cm}$ tedy vyhovuje podmínkám úlohy.

Nejmenší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož výšky vyhovují podmínkám úlohy, je $10\,\mathrm{cm}^2$.

Poznámka. Stejně dobrý odhad dostaneme i z nerovnosti $bv_b \geqq v_c v_b$, zatímco z ostatních kombinací plynou odhady slabší.

2. Předpokládejme, že rovnice

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0 \tag{1}$$

má dva různé reálné kořeny x_1 a x_2, pro které platí $x_1 + x_2 = x_1 x_2 = p$. Potom mnohočlen na její levé straně je dělitelný mnohočlenem $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - px + p$ a má rozklad

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = (x^2 - px + p)(x^2 + rx + s),$$

kde r a s jsou reálná čísla. Roznásobením výrazu na pravé straně poslední rovnosti a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x mnohočlenů na obou stranách dostaneme

$$-4 = -p + r, \tag{2}$$
$$4 = p + s - pr, \tag{3}$$
$$a = -ps + pr, \tag{4}$$
$$b = ps. \tag{5}$$

Ze vztahu (2) plyne

$$r = p - 4. \tag{6}$$

Dosazením za r do vztahu (3) dostaneme

$$s = 4 - p + p(p-4) = (p-4)(p-1). \tag{7}$$

Jelikož kvadratická rovnice $x^2 - px + p = 0$ má dva různé reálné kořeny x_1 a x_2, je její diskriminant kladné číslo, takže

$$p^2 - 4p > 0. \tag{8}$$

Sečteme-li rovnice (4) a (5) a dosadíme za r podle (6), vyjde podle předchozího vztahu

$$a + b = pr = p(p-4) = p^2 - 4p > 0,$$

což jsme chtěli dokázat.

Pro diskriminant D rovnice

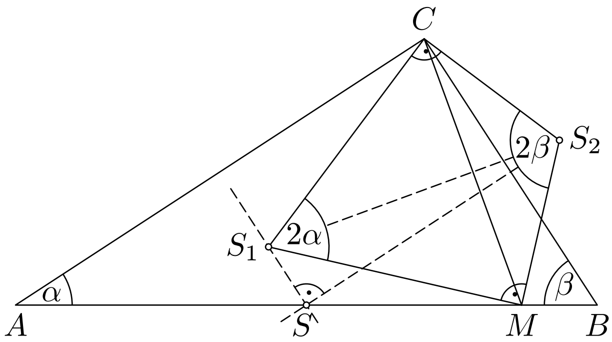
$$x^2 + rx + s = 0$$

podle vztahů (6), (7) a (8) platí

$$D = r^2 - 4s = (p-4)^2 - 4(p-4)(p-1) = -3p(p-4) = -3(p^2 - 4p) < 0.$$

Rovnice tudíž nemá reálné kořeny. Daná rovnice (1) proto nemá jiné reálné kořeny než x_1 a x_2.

3. a) Označme po řadě α a β velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A a B uvažovaného pravoúhlého trojúhelníku ABC. Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem pro společnou tětivu CM kružnic k_1 a k_2 opsaných po řadě trojúhelníkům AMC a BMC plyne (obr. 1)



Obr. 1

$$|\sphericalangle MS_1C| + |\sphericalangle MS_2C| = 2\alpha + 2\beta = 180°.$$

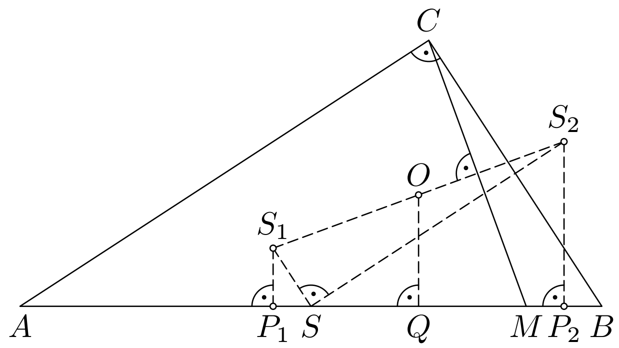
Čtyřúhelník CS_1MS_2 je tudíž tětivový. Protože body M a C jsou souměrně sdružené podle osy úsečky CM, na níž současně leží středná S_1S_2 kružnic k_1 a k_2, platí dále

$$|\sphericalangle S_1MS_2| = |\sphericalangle S_1CS_2| = 90°.$$

Kružnice opsaná čtyřúhelníku CS_1MS_2 je tedy Thaletovou kružnicí sestrojenou nad průměrem S_1S_2. Body S a S_1 však současně leží na ose odvěsny AC, podobně body S a S_2 leží na ose odvěsny BC uvažovaného trojúhelníku. Je tedy $|\sphericalangle S_1SS_2| = 90°$, a bod S leží proto rovněž na Thaletově kružnici opsané čtyřúhelníku CS_1MS_2. (Je-li $M = S$, platí toto tvrzení triviálně.) Tím je dokázána část a) úlohy.

b) Pro poloměr r kružnice (s tětivou CS) nalezené v části a) zřejmě platí $2r \geqq |CS|$ s rovností, právě když je CS její průměr. Protože kružnice s průměrem CS prochází středy obou odvěsen AC, BC, rovnost $2r = |CS|$ nastane, právě když bod S_1 je střed AC a S_2 je střed BC, což zřejmě odpovídá volbě bodu M jako paty výšky z vrcholu C na přeponu AB.

Jiné řešení. a) Označme P_1 a P_2 po řadě středy úseček AM a BM (obr. 2). Protože ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $\frac{1}{2}$ se úsečka AB zobrazí na úsečku P_1P_2,

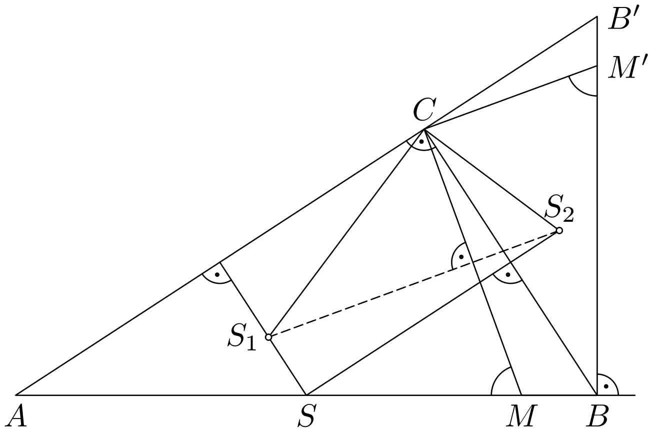


Obr. 2

zobrazí se střed S úsečky AB na střed Q úsečky P_1P_2 a zároveň jakožto obraz bodu S ve zmíněné stejnolehlosti je bod Q středem úsečky MS. Body P_1, P_2 jsou kolmé průměty bodů S_1, S_2 na přeponu AB, takže bod Q je kolmým průmětem středu O kružnice sestrojené nad průměrem S_1S_2. Podle Thaletovy věty na této kružnici zřejmě leží bod S, protože přímky S_1S a S_2S jakožto osy navzájem kolmých odvěsen AC a BC svírají pravý úhel. Ze souměrnosti uvedené kružnice podle přímky OQ pak plyne, že na ní leží i bod M, a tedy i bod C (ze souměrnosti podle přímky S_1S_2). Tím je část a) dokázána.

b) Pro úsečku S_1S_2 a její kolmý průmět P_1P_2 platí $|S_1S_2| \geqq |P_1P_2| = \frac{1}{2}|AB|$. Kružnice opsaná čtyřúhelníku CS_1MS_2 má proto nejmenší průměr $\frac{1}{2}|AB|$, právě když $S_1S_2 \parallel AB$, což vzhledem ke kolmosti úsečky CM a její osy S_1S_2 nastane, právě když M je patou výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC. (Poloměr r této kružnice má pak velikost $r = \frac{1}{4}|AB|$.)

Jiné řešení. a) Uvažujme podobné zobrazení složené z otočení kolem středu C o orientovaný (pravý) úhel ACB a ze stejnolehlosti se středem C a koeficientem rovným poměru $|BC| : |AC|$. Toto zobrazení převede body A, B a M po řadě do bodů B, B' a M', přičemž BC je výška na přeponu AB' pravoúhlého trojúhelníku ABB' a bod M' leží na jeho odvěsně BB' (obr. 3). Podle shodných úhlů AMC a $BM'C$ (nebo též podle pravých úhlů MCM' a MBM') vidíme, že kružnice opsaná trojúhelníku BMC je opsaná i trojúhelníku $BM'C$, takže její střed S_2 je obrazem bodu S_1 v uvažovaném podobném zobrazení (to převádí trojúhelník AMC právě na trojúhelník $BM'C$). To znamená, že úhel S_1CS_2 je pravý, takže je pravý i úhel S_1MS_2 (neboť přímka S_1S_2 je osou úsečky CM). Konečně pravý je i úhel S_1SS_2 (neboť jeho ramena leží na osách navzájem kolmých odvěsen AC a BC), takže všechny tři body C, M, S leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem S_1S_2.



Obr. 3

Tím je dokázána část a) úlohy. Část b) vyřešíme stejně jako v prvním řešení.

4. Ukážeme, že nejmenší m je 113 (nezávisle na hodnotách p, q). Zřejmě je $m > 1$. Pro libovolná přirozená čísla $c < d$ a $m > 1$ označme $S_m(c, d)$ součet všech zlomků v základním tvaru, které leží v otevřeném intervalu (c, d) a jejichž jmenovatel je m. Pak platí nerovnost

$$S_m(c, c+1) \leqq \left(c + \frac{1}{m}\right) + \left(c + \frac{2}{m}\right) + \ldots + \left(c + \frac{m-1}{m}\right) = (m-1)c + \frac{m-1}{2},$$

v níž rovnost nastane, právě když všechna čísla $1, 2, \ldots, m-1$ jsou nesoudělná s m, tj. právě když m je prvočíslo.

Pro daná přirozená čísla p, q a $m > 1$ platí

$$\begin{aligned}
S_m(p, q) &= S_m(p, p+1) + S_m(p+1, p+2) + \ldots + S_m(q-1, q) \leqq \\
&\leqq \left((m-1)p + \frac{m-1}{2}\right) + \left((m-1)(p+1) + \frac{m-1}{2}\right) + \ldots \\
&\quad + \left((m-1)(q-1) + \frac{m-1}{2}\right) = \\
&= (m-1)\frac{(q-p)(p+q-1)}{2} + (m-1)\frac{q-p}{2} = \\
&= (m-1)\frac{q-p}{2}(p+q-1+1) = \frac{(m-1)(q^2-p^2)}{2},
\end{aligned}$$

tedy

$$S_m(p, q) \leqq \frac{(m-1)(q^2-p^2)}{2}. \tag{9}$$

Rovnost ve vztahu (9) přitom nastane, právě když m je prvočíslo. Podle zadání však platí

$$S_m(p, q) \geqq 56(q^2 - p^2).$$

S ohledem na vztah (9) vidíme, že nutně platí $\frac{1}{2}(m-1) \geqq 56$, tj. $m \geqq 113$. Vzhledem k tomu, že číslo 113 je prvočíslo, je nejmenší hledané číslo $m = 113$.

Jiné řešení. Součet všech zlomků, které mají jmenovatel m, nejsou celá čísla a leží v intervalu (p, q), můžeme také určit jako rozdíl součtu všech zlomků se jmenovatelem m ležících v uzavřeném intervalu $\langle p, q\rangle$ a součtu všech přirozených čísel z tohoto intervalu. Pro uvažovaný rozdíl d pak platí

$$d = \sum_{j=pm}^{qm} \frac{j}{m} - \sum_{j=p}^{q} j.$$

Menšence i menšitele v uvažovaném rozdílu lze určit jako součty členů aritmetických posloupností. Pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti (a_i) využijeme známý vztah

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \tfrac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

Pro hledaný rozdíl d tak platí:

$$\begin{aligned} d &= \tfrac{1}{2}(p+q)\big((q-p)m+1\big) - \tfrac{1}{2}(p+q)(q-p+1) = \\ &= \tfrac{1}{2}(p+q)\big[\big((q-p)m+1\big) - (q-p+1)\big] = \tfrac{1}{2}(m-1)(q^2-p^2) \end{aligned}$$

Dále budeme postupovat stejně jako v předchozím způsobu řešení.