56. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Určete reálná čísla a, b, c tak, aby mnohočlen $x^4 + ax^2 + bx + c$ byl dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$ a přitom součet $a^2 + b^2 + c^2$ byl co nejmenší.

2. Je dán trojúhelník ABC se stranou BC délky 22 cm a stranou AC délky 19 cm, jehož těžnice t_a, t_b jsou navzájem kolmé. Vypočítejte délku strany AB.

3. Přirozené číslo nazveme *vlnitým*, pokud pro každé tři po sobě jdoucí číslice a, b, c jeho desítkového zápisu platí $(a - b)(b - c) < 0$. Dokažte, že z číslic $0, 1, \ldots, 9$ je možno sestavit více než 25 000 desetimístných vlnitých čísel, která obsahují všechny číslice od nuly do devítky (číslice 0 nemůže být na prvním místě).

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Pro libovolný bod L jeho strany AB označme K, M paty kolmic z bodu L na strany AC, BC. Zjistěte, pro kterou polohu bodu L je úsečka KM nejkratší.

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 27. března 2007

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh krajského kola kategorie B

1. Dělením mnohočlenu $x^4 + ax^2 + bx + c$ mnohočlenem $x^2 + x + 1$ zjistíme, že platí

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + a) + (b - a + 1)x + (c - a).$$

Mnohočlen $x^4 + ax^2 + bx + c$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$, právě když je zbytek při dělení nulový mnohočlen, tedy $b - a + 1 = 0$ a současně $c - a = 0$; odtud $b = a - 1, c = a$.

Potom

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (a - 1)^2 + a^2 = 3a^2 - 2a + 1 = 3\Big(a - \frac{1}{3}\Big)^2 + \frac{2}{3}.$$

Tento výraz má nejmenší hodnotu pro $a = \frac{1}{3}$; snadno dopočítáme $b = a - 1 = -\frac{2}{3}$, $c = a = \frac{1}{3}$.

Jiné řešení. Mnohočlen $x^4 + ax^2 + bx + c$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$, právě když existují reálná čísla p, q, pro něž

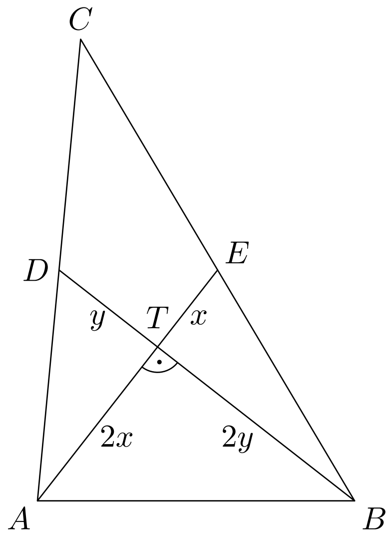
$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 + px + q).$$

Roznásobením pravé strany a porovnáním odpovídajících koeficientů dostaneme čtyři rovnice $p + 1 = 0$, $q + p + 1 = a$, $q + p = b$, $q = c$. Z nich vyjádříme $p = -1$, $q = a$, $c = a$, $b = a - 1$ a pokračujeme jako v prvním řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Dejte dva body za rovnost $x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + a) + (b - a + 1)x + (c - a)$, jeden bod za vyjádření dvou z neznámých a, b, c pomocí třetí z nich, dva body za úpravu výrazu $a^2 + b^2 + c^2$ na tvar $3a^2 - 2a + 1 = 3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$ (nebo $3\left(b + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$) a jeden bod za správné určení čísel a, b, c. Podobně udělte jeden bod za rovnost $x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 + px + q)$, jeden bod za soustavu rovnic $p + 1 = 0$, $q + p + 1 = a$, $q + p = b$, $q = c$, jeden bod za vyjádření $c = a$, $b = a - 1$ a dále jako v prvním řešení.

2. Označme D střed strany AC, E střed strany BC a T těžiště trojúhelníku ABC (obr. 1). Označíme-li dále $3x$ a $3y$ délky těžnic t_a a t_b, máme $|AT| = 2x$, $|ET| = x$, $|BT| = 2y$, $|DT| = y$. Ze zadání plyne, že trojúhelníky ATD, BET, ABT jsou pravoúhlé, takže podle Pythagorovy věty platí

$$(2x)^2 + y^2 = \Big(\frac{b}{2}\Big)^2,$$
$$x^2 + (2y)^2 = \Big(\frac{a}{2}\Big)^2,$$
$$(2x)^2 + (2y)^2 = c^2.$$



Obr. 1

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme $5(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ a po dosazení do třetí rovnice máme $c^2 = 4(x^2 + y^2) = \frac{1}{5}(a^2 + b^2)$. Numericky pak vzhledem k tomu, že $\frac{1}{5}(22^2 + 19^2) = 169$, vychází $c = 13\,\mathrm{cm}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jeden bod dejte za využití toho, že těžiště dělí těžnici v poměru 1 : 2, po jednom bodu za použití Pythagorovy věty pro trojúhelníky ATD, BET, ABT a dva body za výpočet délky strany AB.

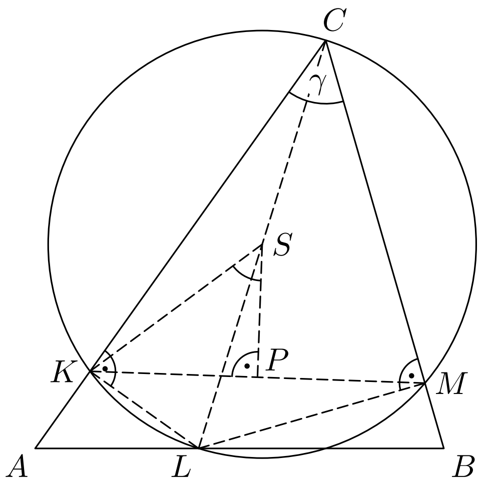
3. Číslice 0, 1, 2, 3 a 4 nazvěme malé (zkráceně m), číslice 5, 6, 7, 8 a 9 naopak velké (zkráceně v). Pravidelným střídáním malých a velkých číslic vždy vznikne vlnité číslo.

Čísel tvaru *vmvmvmvmvm* je $(5!)^2$, čísel tvaru *mvmvmvmvmv* je $4 \cdot 4! \cdot 5!$. Těch vlnitých čísel, která vzniknou pravidelným střídáním malých a velkých číslic, je tedy $5!(5! + 4 \cdot 4!) = 5! \cdot 4! \cdot (5 + 4) = 120 \cdot 24 \cdot 9 = 25\,920 > 25\,000$.

Poznámka. Všech desetimístných vlnitých čísel s vesměs různými číslicemi je 93 106.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jeden bod dejte za poznatek, že pravidelným střídáním malých a velkých číslic vznikne vlnité číslo. Po dvou bodech za správné určení počtu vlnitých čísel tvaru *vmvmvmvmvm* a tvaru *mvmvmvmvmv* a jeden bod za dokončení důkazu.

4. Protože jsou úhly LKC a LMC pravé, leží body K a M na Thaletově kružnici nad průměrem CL (obr. 2). Podle věty o obvodovém úhlu přísluší tětivě KM středový



Obr. 2

úhel velikosti 2γ, proto $|KM| = |CL| \sin\gamma$ (v pravoúhlém trojúhelníku KPS, kde P je střed úsečky KM a S střed úsečky CL, je totiž $|KS| = \frac{1}{2}|CL|$, $|\sphericalangle KSP| = \gamma$). Úsečka KM je tedy nejkratší, právě když je nejkratší úsečka CL; to nastává právě tehdy, je-li L pata výšky z vrcholu C na stranu AB.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Dva body dejte za poznatek, že body K a M leží na Thaletově kružnici nad průměrem CL, dva body za důkaz rovnosti $|KM| = |CL| \sin\gamma$ a dva body za určení polohy bodu L.