56. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. V rovině jsou dány dva různé body L, M a kružnice k. Sestrojte trojúhelník ABC co největšího obsahu tak, aby jeho vrchol C ležel na kružnici k, bod L byl středem strany AC a bod M středem strany BC.

2. Nechť p, q, r jsou přirozená čísla, pro něž platí $p + r\sqrt{p+q} + q = 2\,007$.
a) Určete, jakých hodnot může nabývat součet $p + q + r$.
b) Určete počet všech trojic (p, q, r) přirozených čísel, které vyhovují dané rovnici.

3. Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD lze vepsat kružnici se středem O. Určete obsah S lichoběžníku, jsou-li dány délky úseček OB a OC.

4. Určete největší dvojmístné číslo k s následující vlastností: existuje přirozené číslo N, z něhož po škrtnutí první číslice zleva dostaneme číslo k-krát menší. (Po vyškrtnutí číslice může zápis čísla začínat jednou či několika nulami.) K určenému číslu k pak najděte nejmenší vyhovující číslo N.

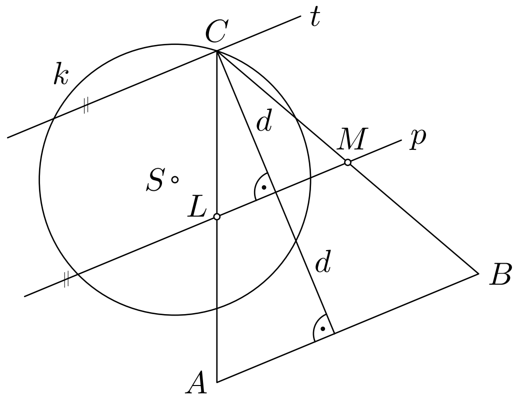
Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 27. března 2007

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh krajského kola kategorie C

1. Při *rozboru* uvažme libovolný trojúhelník ABC s vrcholem C na kružnici k, jehož strany AC, BC mají středy po řadě v bodech L, M (obr. 1). Protože LM je střední příčkou takového trojúhelníku, je jeho obsah roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku LMC. Tento trojúhelník má pevnou stranu LM, takže jeho obsah je největší, právě když je největší jeho výška z vrcholu C, tedy vzdálenost d bodu C od přímky p určené body L, M.



Obr. 1

Dodejme, že místo srovnání obsahů trojúhelníků ABC a LMC dojdeme ke stejné podmínce také takto: trojúhelník ABC má stranu AB pevné délky $c = 2|LM|$ a výšku $v_c = 2d$. Proto je jeho obsah $\frac{1}{2}cv_c$ roven $2|LM| \cdot d$, takže je největší možný, když je taková vzdálenost d.

Pro který bod $C \in k$ je vzdálenost d největší? Veďme bodem C přímku t rovnoběžnou s přímkou p. Je-li vzdálenost d největší možná, musí celá kružnice k ležet ve stejné polorovině s hraniční přímkou t jako přímka p (volbou bodu $C \in k$ uvnitř opačné poloroviny bychom vzdálenost d zvětšili). Přímka t je proto nutně tečnou kružnice k (rovnoběžnou s danou přímkou p) a bod C je jejím dotykovým bodem.

Odtud již plyne *konstrukce*: bod C určíme jako ten ze dvou průsečíků kružnice k s kolmicí na přímku p vedenou středem S kružnice k, který má od přímky p větší vzdálenost (mají-li ji oba průsečíky stejnou, vybereme kterýkoliv z nich). Body A, B pak sestrojíme jako obrazy bodu C v souměrnosti podle středu L, resp. M.

Diskuse: Tečny kružnice k rovnoběžné s přímkou LM mají od této přímky dvě *různé* vzdálenosti, právě když střed S kružnice k na přímce LM *neleží*; tehdy má úloha jediné řešení. V opačném případě, kdy střed S na přímce LM leží, má úloha dvě řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za nalezení podmínky maximální vzdálenosti C od LM, 2 body za postup konstrukce a 1 bod za správně určení obou možných počtů řešení. Intuitivně jasné určení nejvzdálenějšího bodu kružnice k od přímky LM není nutné zdůvodňovat (třetí odstavec řešení).

2. a) Splňují-li přirozená čísla p, q, r danou rovnici, dostaneme z ní vyjádření

$$\sqrt{p+q} = \frac{2\,007 - p - q}{r},$$

takže číslo $\sqrt{p+q}$ je racionální, a tedy celé (odmocnina z přirozeného čísla je totiž buď číslo celé, nebo číslo iracionální). Proto z rovností

$$2\,007 = p + r\sqrt{p+q} + q = (p+q) + r\sqrt{p+q} = \sqrt{p+q}\big(\sqrt{p+q} + r\big)$$

dostáváme rozklad čísla 2 007 na dva celočíselné činitele $\sqrt{p+q}$ a $\sqrt{p+q}+r$, pro které zřejmě platí

$$1 < \sqrt{p+q} < \sqrt{p+q} + r.$$

Z rozkladu na prvočinitele $2\,007 = 3^2 \cdot 223$ tudíž vidíme, že jsou možné pouze dva případy, které přehledně zapíšeme do tabulky:

$\sqrt{p+q}$	$\sqrt{p+q}+r$		$p+q$	r		$p+q+r$
3	669	$\Longleftrightarrow$	9	666	$\Longrightarrow$	675
9	223		81	214		295

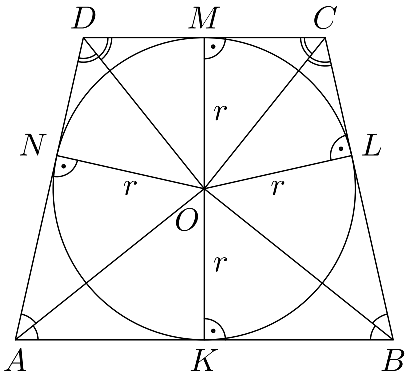
Možné hodnoty součtu $p+q+r$ tedy jsou pouze dvě čísla: 675 a 295. (Konkrétní trojice (p,q,r), které to prokazují, nebudeme uvádět, protože rovnou určíme v části b) jejich počet.)

b) Rovnost $p+q+r = 675$ nastane, právě když bude trojice (p,q,r) splňovat podmínky $p+q = 9$ a $r = 666$; takových trojic je právě tolik co dvojic (p,q), pro něž $p+q = 9$, tedy 8.

Rovnost $p+q+r = 295$ nastane, právě když bude trojice (p,q,r) splňovat podmínky $p+q = 81$ a $r = 214$; takových trojic je právě tolik co dvojic (p,q), pro něž $p+q = 81$, tedy 80.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 5 bodů za část a) a 1 bod za část b). Za část a) řešení udělte pouze 3 body, chybí-li v jinak úplném postupu zdůvodnění, proč je hodnota $\sqrt{p+q}$ celé číslo.

3. Označme postupně K, L, M, N body dotyku vepsané kružnice po řadě se stranami AB, BC, CD, DA (obr. 2). Protože $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník, jeho vnitřní úhly u vrcholů A, B, C, D mají po řadě velikosti α, α, $180° - \alpha$ a $180° - \alpha$. Úsečky OA, OB,



Obr. 2

OC, OD ležící na osách těchto úhlů proto spolu se čtyřmi navzájem shodnými úsečkami OK, OL, OM, ON rozdělují celý lichoběžník na osm pravoúhlých trojúhelníků, které se shodují v jedné odvěsně a mají ostré vnitřní úhly $\frac{1}{2}\alpha$ a $90° - \frac{1}{2}\alpha$. Těchto osm trojúhelníků lze tudíž rozdělit do dvou čtveřic shodných trojúhelníků: jednu z nich tvoří trojúhelníky

OAK, OAN, OBK, OBL a druhou trojúhelníky OCL, OCM, ODM a ODN. Odtud plyne, že obsah S lichoběžníku $ABCD$ je roven čtyřnásobku součtu obsahů trojúhelníků OBL a OCL, tedy čtyřnásobku obsahu trojúhelníku OBC. Podle vnitřních úhlů u vrcholů B a C vidíme, že trojúhelník OBC je pravoúhlý s odvěsnami OB a OC, takže má obsah $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$ a hledaný celkový obsah S je tudíž $S = 2|OB| \cdot |OC|$.

Poznámka. Malá obměna části předchozího postupu: je-li O střed kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku $ABCD$, je snadné ukázat, že jeho obsah je roven dvojnásobku součtu obsahů trojúhelníků OAB a OCD stejně jako trojúhelníků OBC a ODA. Poslední dva trojúhelníky jsou u našeho rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ shodné.

Jiné řešení. Pro výšku v a strany a, b, c, d lichoběžníku $ABCD$ s vepsanou kružnicí $k(O, r)$ platí rovnosti $v = 2r$ a $a + c = b + d$. Z první z nich plyne, že střed O leží na střední příčce lichoběžníku, jejíž délka $\frac{1}{2}(a + c)$ je podle druhé rovnosti rovna $\frac{1}{2}(b + d)$. V našem případě ovšem platí $b = d$, takže střední příčka je shodná s oběma rameny a bod O je jejím středem, neboť rovnoramenný lichoběžník je osově souměrný. Dohromady dostáváme, že bod O leží na kružnici sestrojené nad průměrem BC, a proto je OBC pravoúhlý trojúhelník o obsahu $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$. Jeho výška na přeponu BC je však poloměrem r vepsané kružnice k, tudíž obsah trojúhelníku OBC je rovněž roven $\frac{1}{2}b \cdot r$. Porovnáním obou vyjádření dostaneme rovnost $|OB| \cdot |OC| = b \cdot r$. Pro hledaný obsah S našeho lichoběžníku proto platí

$$S = \frac{a + c}{2} \cdot v = b \cdot 2r = 2 \cdot |OB| \cdot |OC|.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho při prvním postupu 3 body za zdůvodnění, že daný lichoběžník je složen ze dvou čtveřic shodných trojúhelníků, nebo za rovnost typu $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OBC} + S_{ODA}$. Za hlubší poznatek $S = 4 \cdot S_{OBC}$ už udělte 4 body. 1 bodem oceňte zjištění, že OBC je pravoúhlý trojúhelník, stejně jako postup, kdy řešitel pouze rozdělí daný lichoběžník na čtyři dvojice shodných trojúhelníků a dalšího pokroku v úvahách o jejich obsahu nedosáhne.

4. Libovolné $(m + 1)$-místné přirozené číslo N s první číslicí c má vyjádření $N = c \cdot 10^m + x$, kde x je právě to číslo, které dostaneme z čísla N po škrtnutí první číslice c. Podle zadání má platit $N = c \cdot 10^m + x = kx$ neboli $c \cdot 10^m = (k - 1)x$. Číslo $k - 1$ tedy musí být dělitelem čísla $c \cdot 10^m$, které má ovšem pouze jednociferné prvočinitele: prvočísla 2, 5 a prvočinitele z rozkladu číslice c. Budeme proto postupně testovat na prvočinitele čísla $k - 1$ pro největší dvojmístná k:

- ▷ $k = 99$: $k - 1 = 98 = 2 \cdot 7^2$ nevyhovuje, neboť $7^2 \nmid c \cdot 10^m$.
- ▷ $k = 98$: $k - 1 = 97$ nevyhovuje, neboť 97 je dvojmístné prvočíslo.
- ▷ $k = 97$: $k - 1 = 96 = 2^5 \cdot 3$ vyhovuje, neboť například $2^5 \cdot 3 \mid c \cdot 10^m$ pro $c = 3$ a $m = 5$; abychom dostali menší N, můžeme ovšem zvolit menší $m = 4$ a $c = 3 \cdot 2 = 6$ (jiné c pro $m = 4$ nevyhovuje). Pro $m \leqq 3$ už vztah $2^5 \cdot 3 \mid c \cdot 10^m$ neplatí pro žádnou nenulovou číslici c.

Hledané největší dvojmístné k je tedy 97. Podle předchozí diskuse určíme nejmenší vyhovující N, kterému odpovídá $m = 4$, $c = 6$ a $x = 6 \cdot 10^4 : 96 = 625$, takže $N = 6 \cdot 10^4 + 625 = 60\,625$.

Odpověď: Hledané k je rovno 97 a nejmenší vyhovující N je 60 625.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za obecné zjištění, že číslo $k - 1$ musí být dělitelem součinu nenulové číslice a mocniny čísla 10. Za úplné je třeba považovat i řešení, kdy jsou vyloučeny hodnoty $k = 99$, $k = 98$ oddělenými postupy a pro hodnotu $k = 97$ je určeno (nikoliv uhodnuto) nejmenší vyhovující N. Při jinak úplném řešení, kdy je pro $k = 97$ uvedeno sice vyhovující, nikoliv však nejmenší možné N (například $N = 303\,125$), udělte 5 bodů.