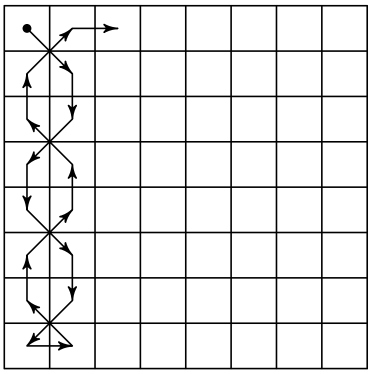
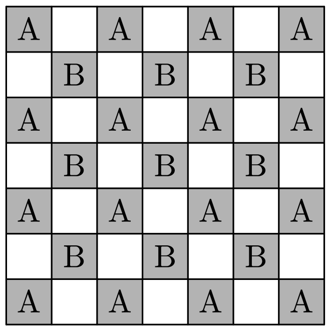
1. *Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$ ($n \geqq 2$) postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě „šikmo“ a „přímo“. „Šikmo“ znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. „Přímo“ znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna n, pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající „šikmo“ tak, že figurka projde celou šachovnici a na každém poli se octne právě jednou.* *(Peter Novotný)*

Řešení. Nejprve ukážeme, že úloha má řešení pro libovolné sudé n. Postavíme-li figurku např. na kterékoliv rohové pole šachovnice $n \times n$, projdeme celou šachovnici po sousedních blocích typu $2 \times n$ způsobem naznačeným na obr. 1 pro $n = 8$. Posloupnosti tahů zde odpovídá posloupnost na sebe navazujících orientovaných úseček. Zcela analogicky lze postupovat pro každé sudé n.



Obr. 1



Obr. 2

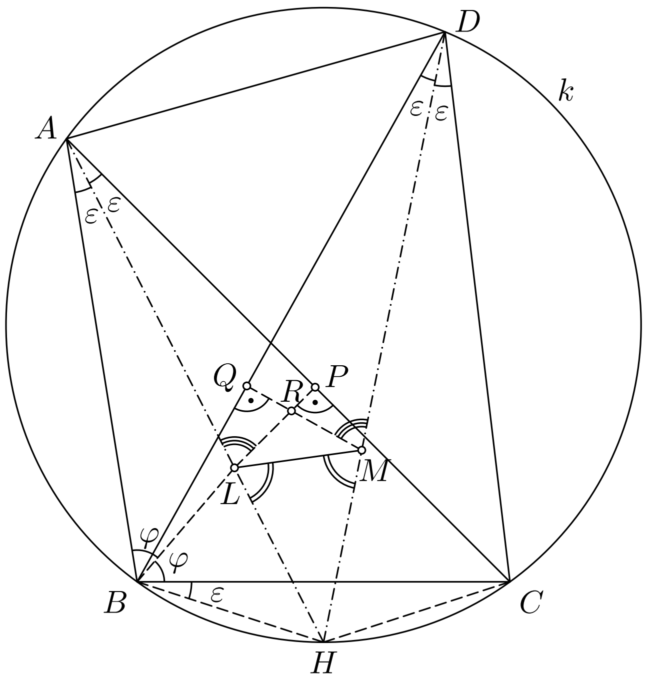
Nyní ukážeme, že pro žádné $n \geqq 3$ liché nelze šachovnici projít požadovaným způsobem. Důkaz provedeme sporem. Připusťme, že pro určité liché n na šachovnici $n \times n$ existuje posloupnost tahů vyhovující podmínkám úlohy. Všechna její pole obarvíme podobně jako běžnou šachovnici 8×8, a to tak, že rohová pole budou černá (podobně jako na obr. 2 pro $n = 7$). Dále všechna černá pole označíme písmeny A a B tak, aby žádná dvě černá pole mající společný právě jeden bod (vrchol) nebyla označena týmž písmenem. Budou-li rohová (černá) pole označena např. písmenem A, bude zřejmě počet polí A o n větší než počet polí B.

Pole šachovnice, která figurka požadovaným způsobem projde, označme postupně $1, 2, 3, \ldots, n^2$ a k-tý tah zápisem $k \mapsto k+1$. Je-li pole s číslem 1 černé, jsou černá právě pole s čísly $1, 2, 5, 6, 9, 10, \ldots$; přitom každý (šikmý) tah $1 \mapsto 2$, $5 \mapsto 6$, $9 \mapsto 10$, … spojuje černá pole označená různými písmeny, takže se celkové počty polí A a B liší nejvýše o 1, což odporuje zjištěnému rozdílu. Ke stejnému sporu dojdeme i v případě, kdy je pole s číslem 1 bílé, takže černá jsou právě pole s čísly $3, 4, 7, 8, 11, 12, \ldots$ spojená (šikmými) tahy $3 \mapsto 4$, $7 \mapsto 8$, $11 \mapsto 12$, …

Tím je úloha vyřešena, řešením jsou všechna sudá $n \geqq 2$.

2. *V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný.*
(P. Leischner)

Řešení. Průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech A, D v trojúhelnících BCA, BCD označme H (obr. 3). Jak známo, je bod H středem příslušného oblouku BC kružnice k



Obr. 3

opsané čtyřúhelníku $ABCD$ (oblouku, který neobsahuje vrcholy A a D). Označme $\varepsilon = |\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle CAH| = |\sphericalangle BDH| = |\sphericalangle CDH| = |\sphericalangle CBH|$ a $\varphi = |\sphericalangle ABL| = |\sphericalangle CBL|$. Pak platí

$$|\sphericalangle BLH| = |\sphericalangle BAL| + |\sphericalangle ABL| = \varepsilon + \varphi = |\sphericalangle LBH|.$$

Trojúhelník HLB je tudíž rovnoramenný se základnou LB, takže $|HB| = |HL|$. Analogicky je i $|HC| = |HM|$. A protože $|HB| = |HC|$, je rovněž $|HL| = |HM|$, takže trojúhelník HML je rovnoramenný a platí $|\sphericalangle HLM| = |\sphericalangle HML|$.

Označme ještě P kolmý průmět bodu L na přímku AC a Q kolmý průmět bodu M na přímku BD (uvažovaný bod R je tak průsečíkem přímek LP a MQ). Protože pravoúhlé trojúhelníky APL a DQM se shodují v úhlech při vrcholech A a D, jsou shodné i úhly PLA a QMD při vrcholech L a M. Odtud a z rovnosti $|\sphericalangle HLM| = |\sphericalangle HML|$ tak vyplývá rovnost $|\sphericalangle PLM| = |\sphericalangle QML|$. To znamená, že trojúhelník LMR je rovnoramenný, jak jsme měli dokázat.

3. *Označme $\mathbb{N}$ množinu všech přirozených čísel a uvažujme všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{N}$ platí*

$$f\bigl(xf(y)\bigr) = yf(x).$$

Určete nejmenší možnou hodnotu $f(2\,007)$. *(P. Calábek)*

Řešení. Uvažujme libovolnou funkci f požadovaných vlastností. Nejprve ukážeme, že je prostá. Jestliže $f(y_1) = f(y_2)$, pak pro všechna přirozená čísla x platí

$$y_1 f(x) = f\bigl(xf(y_1)\bigr) = f\bigl(xf(y_2)\bigr) = y_2 f(x),$$

a poněvadž $f(x)$ je přirozené číslo, plyne odtud $y_1 = y_2$, což znamená, že funkce f je prostá.

Volbou $x = 1$ v dané rovnici dostaneme $f\bigl(f(y)\bigr) = yf(1)$, což pro $y = 1$ dává $f\bigl(f(1)\bigr) = f(1)$. Protože f je prostá, plyne odtud

$$f(1) = 1, \tag{1}$$

takže pro všechna přirozená čísla y navíc platí

$$f\bigl(f(y)\bigr) = y. \tag{2}$$

Z právě odvozeného vztahu zároveň plyne, že oborem hodnot funkce f je celá množina $\mathbb{N}$. Můžeme tedy pro libovolné přirozené číslo z najít y, pro něž $y = f(z)$ a zároveň $f(y) = z$, takže podle vztahu ze zadání pak platí

$$f(xz) = f\bigl(x(f(y)\bigr) = yf(x) = f(z)f(x).$$

Odtud lze matematickou indukcí snadno odvodit, že pro všechna přirozená čísla n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n). \tag{3}$$

Ukážeme, že obraz $f(p)$ libovolného prvočísla p je také prvočíslo. Předpokládejme, že $f(p) = ab$, kde a, b jsou přirozená čísla různá od jedné. Podle (2) a (3) platí

$$p = f\bigl(f(p)\bigr) = f(ab) = f(a)f(b).$$

Protože funkce f je prostá a $f(1) = 1$, platí $f(a) > 1$, $f(b) > 1$, což odporuje předpokladu, že p je prvočíslo.

Jelikož $2\,007 = 3^2 \cdot 223$ je rozklad čísla $2\,007$ na prvočinitele, dostaneme podle (3)

$$f(2\,007) = f^2(3)f(223),$$

kde obě čísla $f(3)$ a $f(223)$ jsou prvočísla. Jestliže $f(3) = 2$, potom podle (2) platí $f(2) = 3$ a nejmenší možná hodnota $f(223)$ je 5, takže $f(2\,007) \geqq 20$. Pokud $f(3) = 3$, nejmenší možná hodnota $f(223)$ je 2 a platí $f(2\,007) \geqq 18$. Snadno vidíme, že pro každou jinou volbu hodnot $f(3)$ a $f(223)$ platí $f(2\,007) \geqq 18$.

Ukážeme, že existuje funkce vyhovující zadání, pro kterou platí $f(2\,007) = 18$. Definujme funkci f následujícím způsobem: Pro libovolné přirozené číslo x, které zapíšeme jako $x = 2^k 223^m q$, kde k a m jsou celá nezáporná čísla a q je přirozené číslo nesoudělné s čísly 2 a 223, zadáme hodnotu $f(x)$ vztahem

$$f(2^k 223^m q) = 2^m 223^k q.$$

Pak platí $f(2\,007) = f(223\cdot 3^2) = 2\cdot 3^2 = 18$. Ověříme, že tato funkce f má požadovanou vlastnost. Nechť $x = 2^{k_1} 223^{m_1} q_1$ a $y = 2^{k_2} 223^{m_2} q_2$ jsou libovolná přirozená čísla zapsaná výše uvedeným způsobem. Potom

$$\begin{aligned} f\bigl(xf(y)\bigr) &= f\bigl(2^{k_1} 223^{m_1} q_1 f(2^{k_2} 223^{m_2} q_2)\bigr) = f(2^{k_1+m_2} 223^{m_1+k_2} q_1 q_2) = \\ &= 2^{k_2+m_1} 223^{m_2+k_1} q_1 q_2 \end{aligned}$$

a současně

$$yf(x) = 2^{k_2} 223^{m_2} q_2 f(2^{k_1} 223^{m_1} q_1) = 2^{k_2+m_1} 223^{m_2+k_1} q_1 q_2.$$

Nejmenší možná hodnota čísla $f(2\,007)$ je 18.

Poznámka. Z výše uvedeného řešení vyplývá, že každá funkce f, která vyhovuje dané funkcionální rovnici, je určena nějakou bijekcí φ množiny prvočísel na sebe, která pro každé prvočíslo p splňuje rovnost $\varphi\bigl(\varphi(p)\bigr) = p$, a to předpisem

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}) &= \varphi(p_1)^{k_1} \varphi(p_2)^{k_2} \dots \varphi(p_m)^{k_m}, \end{aligned}$$

kde p_i jsou navzájem různá prvočísla a k_i nezáporná celá čísla. Každá bijekce φ uvedené vlastnosti rozkládá množinu prvočísel na sjednocení jednoprvkových a dvouprvkových navzájem disjunktních množin takových, že pro každou z nich tvaru $\{p\}$ platí $\varphi(p) = p$ a pro každou z nich tvaru $\{p_1, p_2\}$ platí $\varphi(p_1) = p_2$, $\varphi(p_2) = p_1$. Naopak každý takový rozklad určuje vyhovující bijekci φ.

4. *Množina* M *obsahuje všechna přirozená čísla od* 1 *do* 2 007 *včetně a má následující vlastnost: Je-li číslo* n *prvkem množiny* M, *leží v* M *všechny členy aritmetické posloupnosti s prvním členem* n *a diferencí* $n+1$. *Rozhodněte, zda množina* M *musí obsahovat všechna přirozená čísla větší než určité číslo* m. *(J. Šimša)*

Řešení. Ukážeme, že uvedený závěr obecně neplatí. Jako protipříklad zvolíme množinu

$$\mathsf{M} = \mathbb{N} \setminus \{a\colon a+1 \text{ je prvočíslo větší než } 2\,008\},$$

která zřejmě obsahuje všechna čísla od 1 do 2 007. Přitom aritmetická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem $a_1 = n \in \mathsf{M}$ a diferencí $d = n+1$ má obecný člen tvaru

$$a_k = a_1 + (k-1)d = n + (k-1)(n+1) = (n+1)k - 1,$$

odkud plyne, že číslo $a_k + 1 = (n+1)k$ není prvočíslo pro žádný index $k > 1$, takže a_k leží v M pro každý index k (ať už $a_k \leqq 2\,007$, nebo $a_k \geqq 2\,008$). Protože prvočísel je nekonečně mnoho, je nekonečně mnoho i přirozených čísel, která ve zvolené množině M neleží.

Jiné řešení. Každá vyhovující množina M musí obsahovat všechny členy prvních 2 007 aritmetických posloupností s prvním členem $n \leqq 2\,007$ a diferencí $n+1$:

$$A_1 = (1, 3, 5, \ldots),\ A_2 = (2, 5, 8, \ldots),\ \ldots,\ A_{2\,007} = (2\,007, 4\,015, 6\,023, \ldots).$$

Zřejmě množina hodnot $\mathsf{A}_k = \{k, 2k+1, 3k+2, \ldots\}$ posloupnosti A_k je pro každé k tvořena všemi přirozenými čísly tvaru $i(k+1)+k$ s celým nezáporným i.

Vysvětlíme, proč

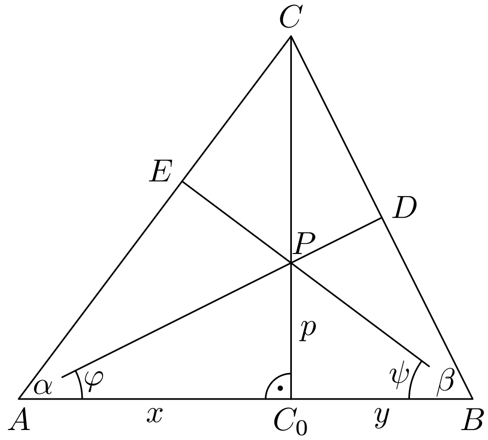
$$\mathsf{M} = \mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_{2\,007}$$

je nejmenší množina požadované vlastnosti. Ukážeme totiž, že pokud $n \in \mathsf{A}_k$ pro některá čísla n a k, pak $\mathsf{A}_n \subseteq \mathsf{A}_k$. Nechť tedy $n \in \mathsf{A}_k$ a $m \in \mathsf{A}_n$. Pak platí $n = i(k+1)+k$ a $m = j(n+1)+n$ pro vhodná celá nezáporná i a j, odkud $m = j(i+1)(k+1) + i(k+{}$ ${}+1) + k = (ji+j+i)(k+1)+k$, což znamená, že $m \in \mathsf{A}_k$.

Existuje však nekonečně mnoho přirozených čísel, která v sestrojené „minimální“ vyhovující množině M neleží; jsou to například všechny násobky čísla $2\,008!$.

5. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC takový, že $|AC| \neq |BC|$. Uvnitř jeho stran BC a AC uvažujme body D a E, pro něž je $ABDE$ tětivový čtyřúhelník. Průsečík jeho úhlopříček AD a BE označme P. Jsou-li přímky CP a AB navzájem kolmé, pak P je průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. Dokažte.* *(J. Mazák)*

Řešení. Označme $\varphi = |\sphericalangle BAD|$ a $\psi = |\sphericalangle ABE|$ (obr. 4). Z rovnosti obvodových úhlů $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB|$ v tětivovém čtyřúhelníku $ABDE$ tak při obvyklém značení úhlů



Obr. 4

v trojúhelníku ABC plyne

$$\alpha + \psi = \beta + \varphi. \tag{1}$$

Označme C_0 patu výšky z vrcholu C, v_c velikost výšky CC_0 a x, y, p velikosti příslušných úseků AC_0, BC_0, PC_0 (obr. 4), takže

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{p}{x}, &\qquad \operatorname{tg}\psi &= \frac{p}{y},\\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{v_c}{x}, &\qquad \operatorname{tg}\beta &= \frac{v_c}{y}. \end{aligned} \tag{2}$$

Pokud bod P není průsečík výšek (tj. úhel $\alpha + \psi$ není pravý), můžeme podle (1) psát

$$\operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \operatorname{tg}(\beta + \varphi),$$

což podle známého vzorce pro tangens součtu po dosazení z (2) dává (využíváme rovnost $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\varphi$, která z (2) navíc plyne)

$$\frac{v_c}{x} + \frac{p}{y} = \frac{v_c}{y} + \frac{p}{x}$$

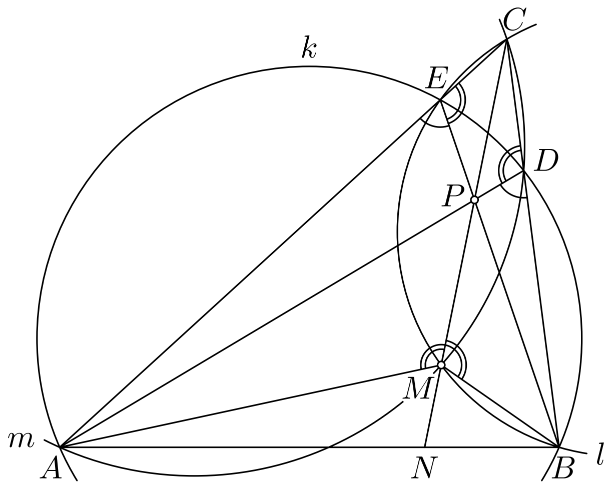
neboli

$$(p - v_c)(x - y) = 0.$$

Protože vzhledem k daným předpokladům je $p < v_c$ a $x \neq y$, nemůže poslední rovnost platit. Je tedy $\alpha + \psi = 90^\circ$ a bod P je průsečíkem výšek, což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Označme k kružnici opsanou tětivovému čtyřúhelníku $ABDE$ a uvažme ještě kružnice l a m opsané trojúhelníkům BEC a ADC (obr. 5). Protože tětiva BE kružnice l protíná tětivu AD kružnice m v bodě P, mají kružnice l, m kromě bodu C

ještě další průsečík, který označíme M. Z uvedené konstrukce vyplývá, že bod P leží uvnitř každé ze tří uvažovaných kružnic a má k nim stejnou mocnost (je to jejich *potenční* bod), proto bod P leží uvnitř úsečky CM.



Obr. 5

Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou BC kružnice l plyne $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BEC| = 180^\circ - |\sphericalangle AEB|$ a analogicky $|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle ADC| = 180^\circ - |\sphericalangle ADB|$, což vzhledem k rovnosti obvodových úhlů $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB|$ nad tětivou AB kružnice k znamená, že

$$|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle AMC|.$$

Označme N patu výšky z vrcholu C trojúhelníku ABC. Pokud $M \neq N$, znamená poslední rovnost, že pravoúhlé trojúhelníky BNM a ANM jsou shodné, což ovšem odporuje předpokladu $|AC| \neq |BC|$. Je proto $M = N$, $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle AMC| = 90^\circ$ a bod P je tak průsečíkem výšek trojúhelníku ABC, což jsme chtěli dokázat.

6. *Určete všechny uspořádané trojice (x, y, z) navzájem různých reálných čísel, které vyhovují množinové rovnici*

$$\{x, y, z\} = \left\{\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y}\right\}.$$

(J. Šimša)

Řešení. Jsou-li x, y, z tři navzájem různá reálná čísla, pak hodnoty

$$u = \frac{x-y}{y-z}, \quad v = \frac{y-z}{z-x}, \quad w = \frac{z-x}{x-y} \tag{1}$$

jsou zřejmě čísla různá od 0 a -1 a jejich součin je roven 1. Stejnou vlastnost tedy musí mít i hodnoty x, y, z z každé hledané trojice. Budeme proto neustále předpokládat, že platí vztahy

$$x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \quad x \neq y \neq z \neq x, \quad xyz = 1. \tag{2}$$

Protože daná množinová rovnice je pro uspořádané trojice (x, y, z), (z, x, y) a (y, z, x) stejná, budeme kromě (2) předpokládat, že platí $x > \max\{y, z\}$, a rozlišíme dva případy podle toho, zda $y > z$, nebo $z > y$. Zaveďme ještě označení intervalů $I_1 = (0, \infty)$, $I_2 = (-1, 0)$, $I_3 = (-\infty, -1)$.

Případ $x > y > z$. Pro zlomky (1) zřejmě platí $u \in I_1$, $v \in I_2$ a $w \in I_3$, takže $u > v > w$. Daná množinová rovnice proto může být splněna jedině tak, že $u = x$, $v = y$ a $w = z$. Po dosazení zlomků (1) a snadné úpravě dojdeme k rovnicím

$$xy + y = yz + z = zx + x, \quad \text{kde } x \in I_1,\ y \in I_2,\ z \in I_3. \tag{3}$$

Podle podmínky $xyz = 1$ z (2) můžeme do rovnice $xy+y = zx+x$ za člen zx dosadit $1/y$ a rovnici dále upravit:

$$xy + y = \frac{1}{y} + x \Rightarrow x(y-1) = \frac{1-y^2}{y} \Rightarrow x = -\frac{1+y}{y} \Rightarrow y = -\frac{1}{1+x}.$$

(Využili jsme toho, že s ohledem na $y \in I_2$ platí $y \neq 1$.) Z posledního vzorce plyne, že hodnota prvního výrazu v soustavě (3) je rovna -1, takže z rovnosti druhého výrazu -1 máme

$$z = -\frac{1}{1+y} = -\frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+x}} = -\frac{1+x}{x},$$

pak ovšem i třetí výraz v (3) je roven -1. Proto každé řešení naší úlohy (ve zkoumaném případě, kdy $x > y > z$) je tvaru

$$(x, y, z) = \left(t, -\frac{1}{1+t}, -\frac{1+t}{t}\right), \tag{4}$$

kde $t \in I_1$ je libovolné (protože platí (3), zkouška není nutná). Z uvedeného postupu rovněž plyne, že volbou $t \in I_2$ (resp. $t \in I_3$) ve vzorci (4) dostaneme všechna řešení naší úlohy s vlastností $z > x > y$ (resp. $y > z > x$), takže při výpisu všech řešení v závěrečné odpovědi není nutné uvádět cyklické permutace trojic ze vzorce (4).

Případ $x > z > y$. Pro zlomky (1) tentokrát platí $u \in I_3$, $v \in I_1$ a $w \in I_2$, takže $v > w > u$, a daná množinová rovnice je tudíž splněna, právě když $u = y$, $v = x$ a $w = z$. Po dosazení zlomků z (1) dojdeme k soustavě

$$x - y = y(y - z), \quad y - z = x(z - x), \quad z - x = z(x - y). \tag{5}$$

Sečtením těchto tří rovnic dostaneme

$$0 = y(y - z) + x(z - x) + z(x - y) = (y - x)(x + y - 2z),$$

odkud vzhledem k $x \neq y$ plyne $z = \frac{1}{2}(x + y)$. Po dosazení zpět do (5) snadno zjistíme (opět s ohledem na $x \neq y$), že vyhovuje pouze $x = 1$, $y = -2$ a $z = -\frac{1}{2}$. Stejnou trojicí čísel je tvořeno (jediné) řešení úlohy s vlastností $y > x > z$ i (jediné) řešení, pro něž $z > y > x$.

Odpověď: Řešením úlohy jsou všechny uspořádané trojice (4), kde $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, a tři trojice (x, y, z) tvaru

$$\Big(1, -2, -\frac{1}{2}\Big), \ \Big(-\frac{1}{2}, 1, -2\Big), \ \Big(-2, -\frac{1}{2}, 1\Big).$$

Poznámka. Vypíšeme-li všech šest možných soustav odpovídajících dané množinové rovnici, dostaneme kromě soustav (3) a (5) ještě soustavy

$$\begin{aligned}
x - y &= z(y - z), \qquad & y - z &= y(z - x), \qquad & z - x &= x(x - y);\\
x - y &= x(y - z), & y - z &= z(z - x), & z - x &= y(x - y);\\
x - y &= y(y - z), & y - z &= z(z - x), & z - x &= x(x - y);\\
x - y &= z(y - z), & y - z &= x(z - x), & z - x &= y(x - y).
\end{aligned}$$

První dvě vzniknou ze soustavy (5) cyklickou záměnou proměnných, takže je lze řešit týmž postupem jako (5). Sečtením všech tří rovnic v každé ze dvou zbývajících soustav dostaneme tutéž rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \qquad \text{neboli} \qquad (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0,$$

která má jediné řešení $x = y = z$, což nejsou navzájem různá čísla.

Jiné řešení. Jsou-li x, y, z tři navzájem různá reálná čísla, pak hodnoty

$$u = \frac{x - y}{y - z}, \quad v = \frac{y - z}{z - x}, \quad w = \frac{z - x}{x - y} \tag{1}$$

jsou zřejmě různé od čísel 0 a -1 a platí mezi nimi vztahy

$$v = f(u), \quad w = f(v) \quad \text{a} \quad u = f(w), \tag{2}$$

kde f je lineární lomená funkce daná předpisem $f(t) = -\dfrac{1}{1 + t}$. Přesvědčíme se o tom přímým výpočtem:

$$f(u) = -\frac{1}{1 + u} = -\frac{1}{1 + \dfrac{x - y}{y - z}} = -\frac{y - z}{(x - y) + (y - z)} = \frac{y - z}{z - x} = v;$$

z důvodu cykličnosti platí i zbývající dva vztahy v (2).

Uvedený poznatek znamená, že každé řešení úlohy je pro vhodné $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ buďto uspořádaná trojice tvaru

$$(x, y, z) = \bigl(t, f(t), f\bigl(f(t)\bigr)\bigr) = \left(t, -\frac{1}{1+t}, -\frac{1+t}{t}\right), \tag{3}$$

nebo uspořádaná trojice tvaru

$$(x, y, z) = \bigl(t, f\bigl(f(t)\bigr), f(t)\bigr) = \left(t, -\frac{1+t}{t}, -\frac{1}{1+t}\right). \tag{4}$$

Zbývá provést zkoušku: snadno se přesvědčíme, že zatímco trojice tvaru (3) je řešením pro každé $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, trojice tvaru (4) vyhovují pouze pro $t = 1$, $t = -2$ a $t = -\frac{1}{2}$ a jsou to cyklické permutace těchto tří hodnot.