# 48. mezinárodní matematická olympiáda

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

V třetí dekádě července 2007 se sjelo do vietnamské Hanoje 520 středoškolských studentů z 93 zemí celého světa na další ročník nejprestižnější soutěže jednotlivců v řešení matematických úloh.

Vietnamští organizátoři se na celý průběh akce připravili velmi dobře a nachystali soutěžícím a jejich vedoucím velmi zajímavý program na celou dobu pobytu. S podporou státních orgánů zajistili všem účastníkům komfortní hotelové ubytování a výtečné stravování, regulérní podmínky pro oba soutěžní dny i následnou náročnou práci hodnotících porot. Koordinační týmy tvořili velmi erudovaní matematici – učitelé mnoha místních vysokých škol a vědeckých ústavů. Pro chvíle odpočinku byl připraven bohatý program, takže všichni účastníci měli možnost poznat nejen pamětihodnosti hlavního města Hanoje a přírodní krásy přímořského letoviska Ha Long, ale seznámit se při jedné exkurzi rovněž s technologií výroby hedvábí. Význam soutěže byl umocněn přítomností vietnamského premiéra *Nguyen Tan Dunga* na slavnostním zahájení v předvečer prvního soutěžního dne. O týden později předával zlaté medaile nejlepším soutěžícím osobně prezident VSR *Nguyen Minh Triet*.

Vedoucím družstva ČR byl doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., z Masarykovy univerzity v Brně. Naše šestičlenné soutěžní družstvo, které doprovázel RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., z Univerzity Palackého v Olomouci, bylo jmenováno na základě výsledků ústředního kola 56. ročníku MO ve Zlíně a následného týdenního výběrového soustředění v Kostelci nad Černými lesy. Tvořili je *Miroslav Klimoš* z 2. ročníku Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci, *Michal Rolínek* ze 4. ročníku Gymnázia v Parléřově ulici v Praze 1, *Lenka Slavíková* ze 4. ročníku Gymnázia v Mnichově Hradišti a trojice studentů z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně: *Zbyněk Konečný* a *Jiří Řihák* ze 4. ročníku a *Hana Šormová* z 2. ročníku.

Soutěžící jednotlivci jako obvykle řešili ve dvou půldnech vždy tři soutěžní úlohy po dobu 4,5 hodiny; za každou ze šesti úloh mohli získat nejvýše 7 bodů. Výběr soutěžních úloh nebyl pro porotu složenou z vedoucích jednotlivých zemí ani letos jednoduchý. V současnosti prožívají různé národní i nadnárodní matematické soutěže velký rozmach; je proto stále obtížnější posoudit, které z navrhovaných cca 30 úloh jsou dostatečně původní a nepodobné těm, které už na nějaké soutěži kdy byly. Diskuse o těchto otázkách jednání poroty znesnadňují a časově protahují. Také snaha poroty zařadit do výsledné šestice dvě extrémně náročné úlohy, které by určily vítěze celého klání, letos nevedla k příliš šťastnému řešení. Z celého pole účastníků úlohu 3 vyřešili pouze tři, úlohu 6 pouze čtyři soutěžící! Proto si mnozí vedoucí kladli otázku: mělo smysl naplnit třetinu zadání soutěže pro 520 účastníků úlohami, které 515 účastníků nemělo vůbec šanci vyřešit? Po soutěži se navíc ukázalo, že ani úloha 6 tolik originální nebyla, protože se přesně kryla s obsahem jednoho článku, který v roce 1993 vyšel v *European Journal of Combinatorics*. Pro nás je ovšem potěšitelné, že po 10 letech byla do soutěže vybrána česká úloha. Jejím autorem je *Marek Pechal*, držitel bronzové medaile z předloňské 46. MMO v Mexiku.

Absolutním vítězem 48. MMO se stal *Konstantin Matvejev* z Ruska, který získal 37 bodů z 42 možných. Zařadil se tak do čela 39 nejlepších soutěžících, kterým za zisk nejméně 29 bodů byly uděleny zlaté medaile. Stříbrné medaile si z Hanoje odvezli 83 účastníci ohodnoceni alespoň 21 bodem. Na bronzovou medaili letos stačilo 14 bodů; potěšilo nás, že mezi 131 držiteli tohoto kovu je i pět reprezentantů ČR (Konečný, Klimoš, Slavíková, Rolínek a Řihák). Ani šestá naše soutěžící Šormová nevyšla úplně naprázdno, když spolu se 148 dalšími soutěžícími bez medailí získala čestné uznání za úplné vyřešení jedné ze šesti soutěžních úloh. Podrobné výsledky českých a slovenských soutěžících jsou zachyceny v následujících tabulkách.

| | | **Body za úlohu** | | | | | | **Body** | **Cena** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Umístění** | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| 197.–225. | Miroslav Klimoš | 7 | 0 | 0 | 6 | 2 | 0 | 15 | III. |
| 171.–196. | Zbyněk Konečný | 7 | 0 | 0 | 7 | 2 | 0 | 16 | III. |
| 226.–253. | Michal Rolínek | 7 | 0 | 0 | 6 | 1 | 0 | 14 | III. |
| 226.–253. | Jiří Řihák | 7 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 14 | III. |
| 197.–225. | Lenka Slavíková | 6 | 0 | 0 | 7 | 2 | 0 | 15 | III. |
| 365.–401. | Hana Šormová | 0 | 1 | 0 | 7 | 0 | 0 | 8 | HM |
| | Celkem | 34 | 1 | 0 | 40 | 7 | 0 | 82 | |

| Umístění | | Body za úlohu 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Body | Cena |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 197.–225. | Samuel Hapák | 7 | 1 | 0 | 7 | 0 | 0 | 15 | III. |
| 226.–253. | Ondrej Mikuláš | 6 | 0 | 0 | 6 | 2 | 0 | 14 | III. |
| 161.–170. | Tomáš Rusin | 3 | 7 | 0 | 6 | 1 | 0 | 17 | III. |
| 322.–343. | Michal Spišiak | 7 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 10 | HM |
| 123.–132. | Michal Szabados | 6 | 7 | 0 | 7 | 0 | 0 | 20 | III. |
| 322.–343. | Vladislav Ujházi | 0 | 1 | 0 | 7 | 2 | 0 | 10 | HM |
| | Celkem | 29 | 17 | 0 | 33 | 7 | 0 | 86 | |

S radostí můžeme konstatovat, že naše družstvo podalo na 48. MMO lepší výkon, než se očekával podle výsledků přípravných soustředění. V neoficiálním žebříčku zúčastněných států, které uvádíme v další tabulce, nám náš výsledek oproti loňské MMO přinesl skok o 10 míst nahoru (případná čísla v závorce uvádějí počet reprezentantů menší než 6). Za povšimnutí stojí, že s výjimkou Polska a Švýcarska podala nečekaně vyrovnaný výkon družstva všech ostatních států, které se v září 2007 zúčastní prvního ročníku *Středoevropské matematické olympiády* (kromě Polska a Švýcarska to bude pořádající Rakousko, dále pak Slovensko, Slovinsko, Chorvatsko a Česko, o účasti v dalších ročnících uvažují i představitelé Německa a Maďarska). Věříme, že nová soutěž na počátku školního roku bude pro její perspektivní účastníky dobrým stimulem k intenzívní celoroční přípravě na následující celosvětovou MO. Ta se v roce 2008 uskuteční ve španělském Madridu.

| | I | II | III | body |
|---|---|---|---|---|
| Rusko | 5 | 1 | 0 | 184 |
| ČLR | 4 | 2 | 0 | 181 |
| Korea | 2 | 4 | 0 | 168 |
| Vietnam | 3 | 3 | 0 | 168 |
| USA | 2 | 3 | 1 | 155 |
| Japonsko | 2 | 4 | 0 | 154 |
| Ukrajina | 3 | 1 | 2 | 154 |
| KLDR | 1 | 4 | 0 | 151 |
| Bulharsko | 2 | 3 | 1 | 149 |
| Tchaj-wan | 2 | 3 | 1 | 149 |
| Rumunsko | 1 | 4 | 1 | 146 |
| Hongkong | 0 | 5 | 1 | 143 |
| Írán | 1 | 3 | 2 | 143 |
| Thajsko | 1 | 3 | 2 | 133 |
| Německo | 1 | 3 | 1 | 132 |
| Maďarsko | 0 | 5 | 0 | 129 |
| Turecko | 1 | 2 | 2 | 124 |
| *Polsko* | 1 | 2 | 2 | 122 |
| Bělorusko | 1 | 1 | 4 | 119 |
| Moldavsko | 0 | 3 | 2 | 118 |

| | I | II | III | body |
|---|---|---|---|---|
| Itálie | 1 | 1 | 3 | 116 |
| Austrálie | 0 | 1 | 4 | 110 |
| Srbsko | 1 | 0 | 4 | 107 |
| Brazílie | 0 | 2 | 3 | 106 |
| Indie | 0 | 3 | 0 | 103 |
| Gruzie | 1 | 1 | 1 | 102 |
| Kanada | 0 | 1 | 3 | 98 |
| Kazachstán | 0 | 1 | 3 | 95 |
| Velká Británie | 1 | 0 | 3 | 95 |
| Kolumbie | 0 | 1 | 3 | 93 |
| Litva | 1 | 0 | 2 | 92 |
| Peru | 0 | 1 | 2 | 91 |
| Řecko | 0 | 1 | 3 | 89 |
| Mongolsko | 0 | 2 | 1 | 88 |
| Uzbekistán | 0 | 1 | 3 | 88 |
| Singapur | 0 | 0 | 5 | 87 |
| Mexiko | 0 | 0 | 4 | 86 |
| *Slovensko* | 0 | 0 | 4 | 86 |
| *Slovinsko* | 0 | 0 | 5 | 85 |
| *Česká republika* | 0 | 0 | 5 | 82 |

| | I | II | III | body |
|---|---|---|---|---|
| Švédsko | 0 | 0 | 4 | 81 |
| *Rakousko* | 0 | 1 | 3 | 80 |
| Francie | 1 | 0 | 2 | 79 |
| Norsko | 0 | 1 | 1 | 79 |
| Belgie | 0 | 0 | 3 | 78 |
| *Chorvatsko* | 0 | 0 | 2 | 76 |
| Argentina | 0 | 1 | 1 | 75 |
| Arménie | 0 | 1 | 1 | 73 |
| Macao | 0 | 1 | 1 | 73 |
| Izrael | 0 | 0 | 3 | 71 |
| Nový Zéland | 0 | 0 | 3 | 71 |
| Ázerbájdžán | 0 | 0 | 3 | 69 |
| Bosna a Hercegovina | 0 | 1 | 0 | 69 |
| Indonézie | 0 | 1 | 0 | 69 |
| Makedonie | 0 | 0 | 3 | 68 |
| Nizozemsko | 0 | 0 | 1 | 65 |
| Estonsko | 0 | 0 | 1 | 64 |
| Albánie | 0 | 0 | 1 | 59 |
| *Švýcarsko* | 0 | 0 | 1 | 59 |
| Lotyšsko | 0 | 0 | 0 | 58 |
| Finsko | 0 | 1 | 0 | 55 |
| Portugalsko | 0 | 0 | 1 | 52 |
| Irsko | 0 | 0 | 1 | 51 |
| Turkmenistán | 0 | 0 | 0 | 51 |
| Dánsko | 0 | 0 | 1 | 50 |
| Španělsko | 0 | 0 | 2 | 48 |
| Kirgizie (5) | 0 | 0 | 1 | 43 |

| | I | II | III | body |
|---|---|---|---|---|
| JAR | 0 | 0 | 0 | 42 |
| Kypr | 0 | 0 | 0 | 41 |
| Trinidad a Tobago | 0 | 0 | 0 | 39 |
| Tádžikistán | 0 | 0 | 1 | 37 |
| Kostarika (5) | 0 | 0 | 1 | 36 |
| Island | 0 | 0 | 0 | 35 |
| Ekvádor | 0 | 0 | 1 | 34 |
| Lucembursko (3) | 0 | 0 | 1 | 34 |
| Malajsie | 0 | 0 | 1 | 34 |
| Salvádor (4) | 0 | 0 | 0 | 34 |
| Pákistán | 0 | 0 | 1 | 32 |
| Paraguay (4) | 0 | 0 | 0 | 32 |
| Bangladéš (5) | 0 | 0 | 0 | 31 |
| Maroko | 0 | 0 | 0 | 28 |
| Kambodža (4) | 0 | 0 | 0 | 26 |
| Srí Lanka | 0 | 0 | 0 | 25 |
| Filipíny | 0 | 0 | 0 | 21 |
| Nigérie | 0 | 0 | 0 | 20 |
| Mongolsko (3) | 0 | 0 | 0 | 17 |
| Kuba (1) | 0 | 0 | 1 | 16 |
| Lichtenštejnsko (2) | 0 | 0 | 1 | 14 |
| Venezuela (3) | 0 | 0 | 0 | 14 |
| Portoriko (3) | 0 | 0 | 0 | 7 |
| Saudská Arábie | 0 | 0 | 0 | 5 |
| Chile (4) | 0 | 0 | 0 | 4 |
| Bolívie (2) | 0 | 0 | 0 | 2 |

Texty soutěžních úloh (v závorce je uvedena země, která úlohu do soutěže navrhla)

**1.** Jsou dána reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pro každé $i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ definujme

$$d_i = \max\{a_j \colon 1 \leqq j \leqq i\} - \min\{a_j \colon i \leqq j \leqq n\}.$$

Nechť

$$d = \max\{d_i \colon 1 \leqq i \leqq n\}.$$

(a) Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ platí nerovnost

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leqq i \leqq n\} \geqq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Ukažte, že existují reálná čísla $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ taková, že v $(*)$ nastane rovnost. (*Nový Zéland*)

**2.** Uvažujme pět bodů $A, B, C, D, E$ takových, že $ABCD$ je rovnoběžník a čtyřúhelník $BCED$ je tětivový. Přímka $l$ prochází bodem $A$, přičemž protíná úsečku $DC$ v jejím vnitřním bodě $F$ a přímku $BC$ v bodě $G$.

Předpokládejme, že platí $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokažte, že přímka $l$ je osou úhlu $DAB$. (*Lucembursko*)

**3.** Někteří účastníci matematické soutěže jsou přátelé. Přátelství je vzájemné. Skupinu soutěžících nazveme *klika*, jsou-li každí dva z nich přátelé. (Speciálně libovolná skupina složená z méně než dvou soutěžících je klika.) Počet členů kliky nazveme jejím *rozměrem.*

Víme, že největší rozměr kliky složené z účastníků soutěže je sudé číslo. Dokažte, že všechny soutěžící je možno rozesadit do dvou místností tak, aby největší rozměr kliky v jedné místnosti se rovnal největšímu rozměru kliky v druhé místnosti. (*Rusko*)

**4.** Osa úhlu $BCA$ trojúhelníku $ABC$ protíná jeho opsanou kružnici v bodě $R$ různém od bodu $C$, osu strany $BC$ v bodě $P$ a osu strany $AC$ v bodě $Q$. Střed strany $BC$ označme $K$ a střed strany $AC$ označme $L$. Dokažte, že obsahy trojúhelníků $RPK$ a $RQL$ se rovnají. (*Česká republika*)

**5.** Kladná celá čísla $a, b$ jsou taková, že číslo $(4a^2-1)^2$ je dělitelné $4ab-1$. Dokažte, že $a = b$. (*Velká Británie*)

**6.** Nechť $n$ je kladné celé číslo. Uvažujme množinu

$$S = \big\{(x, y, z)\colon x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\},\ x + y + z > 0\big\}$$

složenou z $(n+1)^3 - 1$ bodů třírozměrného prostoru. Určete nejmenší možný počet rovin, jejichž sjednocení obsahuje všechny body z $S$, neobsahuje však bod $(0, 0, 0)$. (*Nizozemsko*)