# 1. Středoevropská matematická olympiáda (MEMO)

Z podnětu organizačního výboru rakouské matematické olympiády (ÖMO) byly v průběhu 47. Mezinárodní matematické olympiády (MMO) ve Slovinsku (v roce 2006) delegace středoevropských zemí (Švýcarska, Rakouska, Německa, Slovinska, Chorvatska, České republiky, Slovenska, Polska a Maďarska) seznámeny s návrhem vytvořit pro matematicky talentované středoškoláky uvedených zemí novou soutěž. Snahou iniciátorů vzniku soutěže bylo dalším studentům zemí střední Evropy porovnat své nalosti z matematiky v mezinárodním měřítku. Na tomto jednání byly také předběžně stanoveny cíle a pravidla této nové mezinárodní matematické soutěže. Iniciátoři jejího vzniku přitom vycházeli z pravidel dvojstranné mezinárodní matematické soutěže středoškoláků „Polsko – Rakousko“, která existovala až do roku 2006 plných 29 let. Na světě, a speciálně také v Evropě, existuje celé řada podobných regionálních matematických soutěží (Balkánská MO, Baltic Way, Mediterranean MO, Iberoamerická MO atd.), jichž se každoročně účastní soutěžící ze zemí spádových regionů Evropy. Naši žáci takovou možnost dosud neměli, proto jsme uvítali nabídku rakouských kolegů, která umožní postupné zapojení dalších matematicky nadaných středoškoláků do nové mezinárodní matematické soutěže.

První ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO – Middle European Mathematical Olympiad) se uskutečnil v termínu 20. – 26. září 2007 v rakouském Eisenstadtu – hlavním městě spolkové země Burgenland. Soutěže se v jejím prvním ročníku zúčastnilo pouze sedm (z devíti) středoevropských zemí (Německo a Maďarsko se hodlají zapojit do soutěže až od jejího 2. ročníku).

Každou zemi mělo právo reprezentovat 6 soutěžících, kteří se nezúčastnili uplynulé MMO ve Vietnamu a ve školním roce 2007/08 jsou ještě studenty středních škol. Úvodního ročníku soutěže se nakonec zúčastnilo 40 jednotlivců ze 7 zemí střední Evropy (slovinské družstvo přicestovalo do Eisenstadtu pouze se čtyřmi účastníky).

Ústřední komise české MO vybrala pro 1. Středoevropskou matematickou olympiádu šestici středoškoláků sestavenou z vítězů, resp. těch úspěšných řešitelů ústředního kola 56. ročníku MO v kategorii A, kteří se nezúčastnili v červenci 48. MMO ve Vietnamu a v uplynulém školním roce 2006/07 ještě nematurovali. České reprezentační družstvo tak v abecedním pořadí tvořili tito soutěžící: *Jan Máca* (G Třebíč), *Matěj Peterka* (G v Praze 6, Nad Alejí), *Alena Peterová* (G Dobruška), *Samuel Říha* (G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Tomáš Toufar* (GMK v Bílovci) a *Jan Vaňhara* (GLJ Holešov). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* z Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *Mgr. Martin Panák, Ph.D.* z brněnského oddělení Matematického ústavu AV ČR.

Vlastní soutěž se konala ve dvou soutěžních dnech, a to v sobotu 22. září, kdy proběhla soutěž jednotlivců, a v neděli 23. září pak soutěž družstev. Po oba soutěžní dny řešili jednotlivci, resp. reprezentační družstva v rámci soutěže družstev po 4 soutěžních úlohách, na jejichž vypracování byl každý ze soutěžních dnů vyhrazen čas 5 hodin. Každá úloha byla přitom hodnocena (podle předem schváleného systému hodnocení každé úlohy) celočíselným počtem bodů v rozpětí 0 – 8 bodů.

Podobně jako na MMO měly jednotlivé země možnost s jistým časovým předstihem zaslat organizačnímu výboru návrhy svých úloh pro soutěž. Z nich pak mezinárodní jury vybrala dvě čtveřice úloh, jednu pro soutěž jednotlivců a druhou pro soutěž družstev. Je potěšitelné, že mezi osmi vybranými úlohami byly také dvě úlohy české. Jedna z nich byla použita v soutěži jednotlivců (autorem byl *Marek Pechal*) a druhá v soutěži družstev (autorem úlohy byl *doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.*).

Náročnost úloh byla srovnatelná s úlohami z podobných mezinárodních soutěží (včetně MMO). Soutěžící jednotlivých zemí tak měli možnost získat potřebné mezinárodní zkušenosti, které mohou zúročit již na příští (49.) MMO v roce 2008. Pro lepší posouzení jejich obtížnosti (a také trendu při tvorbě nových matematických úloh) vám nabízíme zadání obou sad soutěžních úloh. V závorce za úlohou je vždy uvedena země, která ji do soutěž navrhla.

## Soutěž jednotlivců

(22. září 2007)

**1.** Nechť $a$, $b$, $c$, $d$ jsou kladná reálná čísla splňující rovnost $a+b+c+d=4$. Dokažte, že

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab \leq 4\,.$$

(*Švýcarsko*)

**2.** Je dáno $k$ ($k$ je celé číslo větší než 1) sad míčů. Každá sada obsahuje $n$ míčů, které jsou označeny čísly 1, 2, …, $n$. Každý míč obarvíme jednou ze dvou barev (bílou nebo černou) tak, že

a) míče označené stejným číslem mají stejnou barvu,

b) každá $(k+1)$-prvková množina míčů, které jsou označeny (ne nutně různými) čísly $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ tak, že platí $a_1+a_2+\ldots+a_k=a_{k+1}$, není jednobarevná.

V závislosti na $k$ určete největší možné číslo $n$, pro něž existuje takové obarvení míčů.

(*Slovinsko*)

**3.** Nechť $k$ je daná kružnice a $k_1$, $k_2$, $k_3$ a $k_4$ jsou čtyři menší kružnice, jejichž středy po řadě $O_1$, $O_2$, $O_3$ a $O_4$ leží na kružnici $k$. Pro $i = 1, 2, 3, 4$ se kružnice $k_i$ a $k_{i+1}$ ($k_5 = k_1$) protínají ve dvou bodech $A_i$ a $B_i$, přičemž body $A_i$ leží na kružnici $k$. Předpokládejme že body $O_1$, $A_1$, $O_2$, $A_2$, $O_3$, $A_3$, $O_4$, $A_4$ jsou navzájem různé a leží v tomto pořadí na kružnici $k$. Dokažte, že $B_1B_2B_3B_4$ je pravoúhelník.

(*Švýcarsko*)

**4.** Určete všechny dvojice $(x, y)$ kladných celých čísel, které vyhovují rovnici

$$x! + y! = x^y .$$

(*Česká republika*)

**Soutěž družstev**

(23. září 2007)

**1.** Nechť $a, b, c, d$ jsou libovolná reálná čísla z uzavřeného intervalu $\langle \frac{1}{2}, 2\rangle$, která vyhovují podmínce $abcd = 1$. Určete největší možnou hodnotu výrazu

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(d + \frac{1}{a}\right) .$$

(*Česká republika*)

**2.** Pro libovolnou množinu $\mathsf{P}$ pěti bodů v rovině (v obecné poloze) označme $a(\mathsf{P})$ počet všech ostroúhlých trojúhelníků s vrcholy v množině $\mathsf{P}$. Určete největší možnou hodnotu $a(\mathsf{P})$.

(Pět bodů v rovině je v obecné poloze, jestliže žádné tři z nich neleží na téže přímce.)

(*Švýcarsko*)

**3.** Označme $s(T)$ součet délek všech hran čtyřstěnu $T$. Uvažujme všechny čtyřstěny, jejichž délky hran jsou navzájem různá kladná celá čísla, přičemž jedno z nich je 2 a jedno 3. Takové čtyřstěny budeme nazývat MEMO-čtyřstěny.

a) Určete všechna kladná celá čísla $n$, pro něž existuje MEMO-čtyřstěn $T$ s vlastností $s(T) = n$.

b) Určete počet navzájem *různých* MEMO-čtyřstěnů $T$, pro něž platí $s(T) = 2\,007$.

Dva čtyřstěny považujeme za *různé*, jestliže jeden z nich nelze převést na druhý pomocí složení souměrností podle roviny, posunutí nebo otočení.

(Není třeba dokazovat, že čtyřstěny nejsou degenerované, tj. mají kladný objem.)

(*Rakousko*)

**4.** Určete všechna kladná celá čísla $k$ s vlastností: existuje celé číslo $a$ takové, že $(a+k)^3 - a^3$ je násobkem čísla 2 007.

(*Rakousko*)

Texty úloh byly soutěžícím předloženy (v obou soutěžích) v jejich mateřských jazycích. Řešení jednotlivých úloh mohli soutěžící odevzdávat rovněž v mateřském jazyku. Každý ze soutěžních dnů měli soutěžící po dobu úvodních 45 minut možnost klást (písemně) případné dotazy, na něž, stejně jako na MMO (se souhlasem mezinárodní jury), odpověděl vždy vedoucí příslušné delegace.

Následující dva dny (23. a 24. 9.) byly vyhrazeny na koordinace žákovských řešení. To probíhalo stejným způsobem jako na MMO. Jednání při koordinaci úloh byla vedena v angličtině a němčině. Na závěrečném jednání jury byly rovněž stanoveny hranice pro udělení zlatých, stříbrných a bronzových medaili. Dále bylo potvzeno definitivní pořadí zemí v soutěži družstev.

O tom, že úlohy v 1. ročníku soutěže byly poměrně náročné svědčí i poměrně nízké hranice pro udělení medailí v soutěži jednotlivců. Pro zlatou medaili bylo stanoveno bodové rozpětí 23 – 32 bodů, pro stříbrnou 13 – 22 bodů a pro bronzovou medaili 8 – 12 bodů. Nejlepšího výsledku v soutěži jednotlivců přitom dosáhla *Joanna Bogdanowicz* z Polska, která získala 26 bodů. Celkově byly uděleny 2 zlaté, 8 stříbrných a 10 bronzových medailí. Nejlepšího výsledku v soutěži jednotlivců dosáhli z českého družstva *Samuel Říha* (10 b.) a *Tomáš Toufar* (9 b.), kteří obdrželi bronzové medaile.

O něco lépe si vedli naši soutěžící v soutěži družstev. Díky dobře zorganizované strategii řešení všech čtyř úloh obsadili po zásluze velice pěkné 3. místo a domů si tak všichni přivezli cennou bronzovou medaili. Před námi skončilo Polsko s celkovým ziskem 31 bodů (ze 32 možných) a Chorvatsko se ziskem 25 bodů. Družstva na 3. – 5. místě dosáhla shodně zisku 21 bodů, ale české družstvo (jako jediné z nich) vyřešilo bezchybně – bez ztráty bodu – dvě soutěžní úlohy (2. a 3.), proto v konečném pořadí obsadilo 3. příčku před Slovenskem a Rakouskem. Na šestém místě skončilo Švýcarsko (19 b.) a na sedmí byli Slovinci (18 b.).

Pro soutěžící a ostatní účastníky 1. Středoevropské MO připravili pořadatelé na poslední dva dny jednodenní výlety, a to k Neziderskému jezeru (Neusiedler See) a do Vídně, kde si účastníci soutěže měli možnost prohlédnout pamětihodnosti hlavního města Rakouska.

Slavnostní ukončení soutěže se konalo za přítomnosti zástupců politického života země Burgenland a ministerstva školství Rakouska v kongresovém sále hotelu Ohr v Eisenstadtu. Předseda organizačního výboru 1. Středoevropské olympiády *Univ. Prof. Dr. Gerd Baron* předal všem oceněným medaile a rovněž poděkoval *Mag. Thomasi Mühlgassnerovi* z Eisenstadtu, který odpovídal za zdárný průběh a celou organizaci 1. Středoevropské MO. Podmínky pro vlastní soutěž v místě konání byly poprávu označeny vedoucími všech delegací za nadstandardní.

Vedoucí českého družstva pozval na tomto jednání všechny delegace k účasti na 2. ročníku Středoevropské matematické olympiády, která se bude konat počátkem září 2008 v České republice, a to pod záštitou *prof. RNDr. Lubomíra Dvořáka, CSc.*, rektora UP v Olomouci na půdě olomoucké univerzity.

Pro zájemce nakonec uvádíme dvě odlišná řešení 1. úlohy ze soutěže jednotlivců. Dlužno podotknout, že tato úloha se nakonec ukázala (v soutěži jednotlivců) jako nejobtížnější.

*Řešení 1. úlohy (soutěž jednotlivců).* Nechť $p \geq q \geq r \geq s$ je uspořádání prvků uvažované množiny $\{a, b, c, d\}$ kladných reálných čísel, vyhovujících podmínce ze zadání úlohy $a + b + c + d = 4$. Užitím permutační nerovnosti pak dostaneme

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab = a \cdot abc + b \cdot bcd + c \cdot cda + d \cdot dab \leq$$

$$\leq p \cdot pqr + q \cdot pqs + r \cdot prs + s \cdot qrs = (pq + rs)(pr + qs)\,.$$

Dvojím užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem kladných reálných čísel $p, q, r, s$ dále obdržíme

$$(pq + rs)(pr + qs) \leq \left(\frac{pq + rs + pr + qs}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\big((p + s)(q + r)\big)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\left(\frac{(p + s) + (q + r)}{2}\right)^4 = \frac{1}{64}\,(a + b + c + d)^4 = 4\,.$$

což jsme chtěli dokázat.

*Jiné řešení.* Vzhledem k tomu, že se nerovnost nezmění pro každou cyklickou permutaci uspořádané čtveřice $(a, b, c, d)$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a \geq c$. Podobně lze předpokládat, že $b \geq d$. Pokud by totiž platilo $b \leq d$, dostaneme cyklickou záměnou uspořádané čtveřice $(a, b, c, d)$ čtveřici $(d, a, b, c)$, v níž $d \geq b$ a současně $a \geq c$. Pak platí

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab = ac(ab + cd) + bd(bc + ad)\,. \tag{1}$$

Pro $a \geq c$ a $b \geq d$ platí $(a - c)(b - d) \geq 0$. Tato nerovnost je tedy ekvivaletní s nerovností

$$ab + cd \geq bc + ad\,. \tag{2}$$

Využitím nerovnosti (2) a užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro dvojici kladných reálných čísel odhadneme pravou stranu rovnosti (1) následujícím způsobem

$$ac(ab + cd) + bd(bc + ad) \leq ac(ab + cd) + bd(ab + cd) = (ab + cd)(ac + bd) \leq$$

$$\leq \left(\frac{(ab + cd) + (ac + bd)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(a + d)(b + c)}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\frac{1}{4}\,(a + b + c + d)^2}{2}\right)^2 = 4\,,$$

což dokazuje dané tvrzení.