ÚLOHY DOMÁCÍHO KOLA
57. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

KATEGORIE A

1. Najděte všechny trojice reálných čísel a, b, c s vlastností: Každá z rovnic

$$x^3 + (a+1)x^2 + (b+3)x + (c+2) = 0,$$
$$x^3 + (a+2)x^2 + (b+1)x + (c+3) = 0,$$
$$x^3 + (a+3)x^2 + (b+2)x + (c+1) = 0$$

má v oboru reálných čísel tři různé kořeny, celkem je to však pouze pět různých čísel. (*Jaromír Šimša*)

2. V rovině je dána úsečka AV a ostrý úhel velikosti α. Určete množinu středů kružnic opsaných všem těm trojúhelníkům ABC s vnitřním úhlem α při vrcholu A, jejichž výšky se protínají v bodě V. (*Pavel Leischner*)

3. Množinu M tvoří $2n$ navzájem různých kladných reálných čísel, kde $n \geq 2$. Uvažujme n obdélníků, jejichž rozměry jsou čísla z M, přičemž každý prvek z M je použit právě jednou. Určete, jaké rozměry mají tyto obdélníky, je-li součet jejich obsahů
a) největší možný; b) nejmenší možný. (*Jaroslav Švrček*)

4. Určete počet konečných rostoucích posloupností přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ všech možných délek k, pro které platí $a_1 = 1$, $a_i \mid a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $a_k = 969\,969$. (*Martin Panák*)

5. Je dána kružnice k, bod O, který na ní neleží, a přímka p, která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici l, která má vnější dotyk s kružnicí k a dotýká se i přímky p. Příslušné body dotyku označme A a B. Pokud body O, A, B neleží v přímce, sestrojíme kružnici m opsanou trojúhelníku OAB. Dokažte, že všechny takové kružnice m mají další společný bod různý od bodu O, anebo se dotýkají téže přímky. (*Ján Mazák*)

6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje celé číslo a $(1 < a < 5^n)$ takové, že platí $5^n \mid a^3 - a + 1$. (*Ján Mazák*)

KATEGORIE B

1. Najděte všechna přirozená čísla k, pro něž je zápis čísla $6^k \cdot 7^{2007-k}$ v desítkové soustavě zakončen dvojčíslím a) 02; b) 04. (*Eva Řídká*)

2. V pásu mezi rovnoběžkami p, q jsou dány dva různé body M a N. Sestrojte kosočtverec nebo čtverec, jehož dvě protější strany leží na přímkách p a q a body M a N po jednom leží na zbývajících dvou stranách. (*Jaromír Šimša*)

3. Jsou-li x a y reálná čísla, pro něž platí $x^3 + y^3 \leq 2$, potom $x + y \leq 2$. Dokažte. (*Ján Mazák*)

4. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s délkami stran a, b, c a délkami těžnic t_a, t_b, t_c, pro něž platí $a + t_a = b + t_b$. Uvažujte oba případy, kdy AB je a) přepona, b) odvěsna. (*Pavel Novotný*)

5. Určete všechny dvojice a, b reálných čísel, pro něž má každá z kvadratických rovnic

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž právě jeden z nich je oběma rovnicím společný.
(*Jaroslav Švrček*)

6. Obdélník $2\,005 \times 2\,007$ je rozdělen na černé a bílé jednotkové čtverečky. Dokažte, že pak pro jednu z barev (černou nebo bílou) existuje více než 95 800 pravoúhelníků (složených z jednotkových čtverečků), jež se navzájem nepřekrývají a jejichž rohové čtverečky mají vesměs zvolenou barvu, přičemž každá z jejich stran je tvořena aspoň dvěma čtverečky. (*Pavel Leischner*)

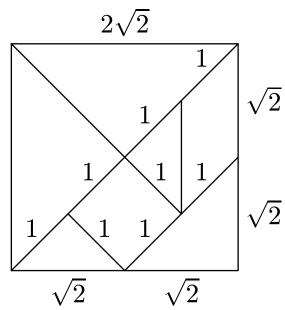
KATEGORIE C

1. Určete nejmenší přirozené číslo n, pro něž i čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ jsou přirozená.
(*Jaroslav Švrček*)

2. Čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsána kružnice se středem S. Určete rozdíl $|\angle ASD| - |\angle CSD|$, jestliže $|\angle ASB| - |\angle BSC| = 40°$. (*Jaromír Šimša*)

3. Máme určitý počet krabiček a určitý počet kuliček. Dáme-li do každé krabičky právě jednu kuličku, zbyde nám n kuliček. Když však dáme právě n krabiček stranou, můžeme všechny kuličky rozmístit tak, aby jich v každé zbývající krabičce bylo právě n. Kolik máme krabiček a kolik kuliček? (*Vojtech Bálint*)

4. Tangram je skládačka, kterou lze vyrobit z papíru rozřezáním vystřiženého čtverce na sedm dílů podle čar vyznačených na obrázku. Předpokládejme, že délka strany čtverce je $2\sqrt{2}$ cm.



Rozhodněte, zda lze z dílů tangramu složit:
a) obdélník $2\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}$,
b) obdélník $\sqrt{2}\,\text{cm} \times 4\sqrt{2}\,\text{cm}$. (*Pavel Leischner*)

5. Ve skupině n lidí ($n \geq 4$) se někteří znají. Vztah „znát se“ je vzájemný: jestliže osoba A zná osobu B, pak také B zná A a nazýváme je dvojicí známých.
a) Jestliže mezi každými čtyřmi osobami jsou aspoň čtyři dvojice známých, pak každé dvě osoby, které se neznají, mají společného známého. Dokažte.
b) Zjistěte, pro která $n \geq 4$ existuje skupina osob, v níž jsou mezi každými čtyřmi osobami aspoň tři dvojice známých a současně se některé dvě osoby neznají ani nemají společného známého.
c) Rozhodněte, zda ve skupině šesti osob mohou být v každé čtveřici právě tři dvojice známých a právě tři dvojice neznámých. (*Ján Mazák*)

6. Klárka měla na papíru napsáno trojmístné číslo. Když ho správně vynásobila devíti, dostala čtyřmístné číslo, jež začínalo touž číslicí jako číslo původní, prostřední dvě číslice se rovnaly a poslední číslice byla součtem číslic původního čísla. Které čtyřmístné číslo mohla Klárka dostat?
(*Peter Novotný*)