Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Určete nejmenší přirozené číslo n, pro něž i čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ jsou přirozená.*

Řešení. Vysvětlíme, proč prvočíselný rozklad hledaného čísla musí obsahovat jen vhodné mocniny prvočísel 2, 3 a 5. Každé případné další prvočíslo by se v rozkladu čísla n muselo vyskytovat v mocnině, jejíž mocnitel je dělitelný dvěma, třemi i pěti zároveň (viz návodnou úlohu 1). Po vyškrtnutí takového prvočísla by se číslo n zmenšilo a zkoumané odmocniny by přitom zůstaly celočíselné.

Položme proto $n = 2^a 3^b 5^c$, kde a, b, c jsou přirozená čísla. Čísla $\sqrt[3]{3n}$ a $\sqrt[5]{5n}$ jsou celá, proto je exponent a násobkem tří a pěti. Také $\sqrt{2n}$ je celé číslo, proto musí být číslo a liché. Je tedy lichým násobkem patnácti: $a \in \{15, 45, 75, \ldots\}$. Analogicky je mocnitel b takový násobek deseti, který při dělení třemi dává zbytek 2: $b \in \{20, 50, 80, \ldots\}$. Číslo c je pak tím násobkem šesti, který při dělení pěti dává zbytek 4: $c \in \{24, 54, 84, \ldots\}$. Z podmínky, že n je nejmenší, nakonec plyne $n = 2^{15}3^{20}5^{24}$.

Přesvědčíme se ještě, že dané odmocniny jsou přirozená čísla:

$$\sqrt{2n} = 2^8 3^{10} 5^{12}, \quad \sqrt[3]{3n} = 2^5 3^7 5^8, \quad \sqrt[5]{5n} = 2^3 3^2 5^5.$$

Závěr: $n = 2^{15}3^{20}5^{24}$.

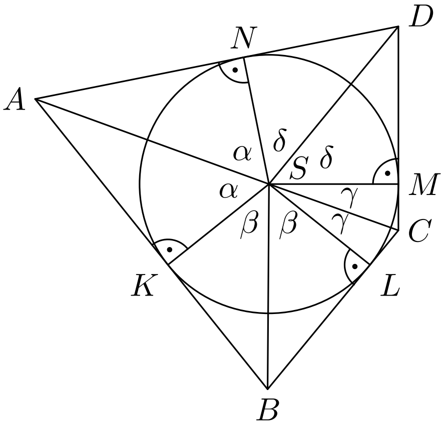
Úlohy k procvičení:

1. Jsou-li m, k a $\sqrt[k]{m}$ celá čísla větší než 1, pak v rozkladu čísla m na prvočinitele se každé prvočíslo vyskytuje v mocnině, jejíž mocnitel je násobkem čísla k. Dokažte. [Rozklad čísla m dostaneme, když rozklad čísla $\sqrt[k]{m}$ umocníme na k-tou.]
2. Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c, pro které současně platí
$$n(ab, c) = 2^8, \quad n(bc, a) = 2^9, \quad n(ca, b) = 2^{11},$$
kde $n(x, y)$ značí nejmenší společný násobek přirozených čísel x, y. [50–C–S–1]
3. Pro kolik uspořádaných trojic přirozených čísel x, y, z platí $xyz = 1\,000\,000$? [Návod: $1\,000\,000 = 2^6 5^6$. Položme $x = 2^a 5^p$, $y = 2^b 5^q$, $z = 2^c 5^r$ a prozkoumejme všechny možnosti pro $a + b + c = 6$ a pro $p + q + r = 6$. Nakonec zjistíme hledaný počet: $28 \cdot 28 = 784$.]

2. *Čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsána kružnice se středem S. Určete rozdíl $|\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD|$, jestliže $|\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle BSC| = 40°$.*

Řešení. Paty kolmic ze středu S vepsané kružnice ke stranám AB, BC, CD a DA označme po řadě písmeny K, L, M a N (obr. 1). Pravoúhlé trojúhelníky ASK a ASN jsou shodné podle věty Ssu. Mají totiž společnou přeponu AS a shodné odvěsny SK a SL, jejichž délka je rovna poloměru vepsané kružnice. Ze shodnosti těchto trojúhelníků plyne jednak známé tvrzení o délkách tečen ($|AK| = |AN|$), jednak shodnost úhlů ASK a ASN, jejichž společnou velikost označíme α:

$$|\sphericalangle ASK| = |\sphericalangle ASN| = \alpha.$$



Obr. 1

Analogicky zjistíme shodnost trojúhelníků SBK a SBL, dále pak SCL a SCM, nakonec SDM a SDN. Na základě uvedených shodností zjistíme, že lze položit

$$|\sphericalangle BSK| = |\sphericalangle BSL| = \beta, \quad |\sphericalangle CSL| = |\sphericalangle CSM| = \gamma, \quad |\sphericalangle DSM| = |\sphericalangle DSN| = \delta.$$

Odtud a z obr. 1 pak plyne

$$\begin{aligned}|\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD| &= (\alpha+\delta) - (\gamma+\delta) = \alpha - \gamma = \\ &= (\alpha+\beta) - (\gamma+\beta) = |\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle BSC| = 40^\circ.\end{aligned}$$

Závěr: $|\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD| = 40^\circ$.

ÚLOHY K PROCVIČENÍ:

1. Tečny vedené ke kružnici $k(O,r)$ z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech T a U. Dokažte: a) $|AT| = |AU|$, b) $|\sphericalangle AOT| = |\sphericalangle AOU|$.
2. Čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsána kružnice se středem O. Dokažte, že a) $|\sphericalangle DOC| = |\sphericalangle DAO| + |\sphericalangle ABO|$, b) $AB \parallel CD \;\Rightarrow\; |\sphericalangle AOD| = 90^\circ$.
3. Tečny vedené ke kružnici $k(O,r)$ z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech T a U. Třetí tečna protíná úsečky AT a AU po řadě v bodech B a C. Určete obvod trojúhelníku ABC, je-li $|AT| = 12\,\text{cm}$. [24 cm: pro bod V dotyku tečny BC platí $|CV| = |CU|$ a $|BV| = |BT|$, takže $|BC| = |CU| + |BT|$.]

3. *Máme určitý počet krabiček a určitý počet kuliček. Dáme-li do každé krabičky právě jednu kuličku, zbyde nám n kuliček. Když však dáme právě n krabiček stranou, můžeme všechny kuličky rozmístit tak, aby jich v každé zbývající krabičce bylo právě n. Kolik máme krabiček a kolik kuliček?*

ŘEŠENÍ. Označíme-li x počet krabiček a y počet kuliček, vede zadání na soustavu rovnic

$$x + n = y \qquad \text{a} \qquad (x-n)\cdot n = y \tag{1}$$

s neznámými x, y a n z oboru přirozených čísel. Vyloučením neznámé y dostaneme rovnici $x + n = (x-n)\cdot n$, která nemá řešení pro $n = 1$. Pro $n \geqq 2$ dostaneme

$$x = \frac{n^2+n}{n-1} = n + 2 + \frac{2}{n-1},$$

odkud vidíme, že (přirozené) číslo $n-1$ musí být dělitelem čísla 2. Tedy $n \in \{2, 3\}$. Přípustné hodnoty n dosadíme do (1) a soustavu vyřešíme (lze též využít poslední vztah). Pro $n=2$ dostaneme $x=6$, $y=8$ a pro $n=3$ určíme $x=6$ a $y=9$.

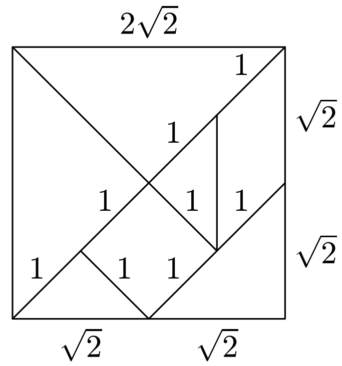
Zkouška: Mějme šest krabiček a osm kuliček. Když do každé krabičky dáme právě jednu kuličku, zbyde $n=2$ kuliček. Když však odebereme dvě krabičky, můžeme do zbývajících čtyř rozdělit kuličky právě po dvou. Podmínky úlohy jsou tedy splněny. Pro šest krabiček a devět kuliček provedeme zkoušku stejně snadno.

Závěr: Buď máme šest krabiček a osm kuliček, nebo šest krabiček a devět kuliček.

Úlohy k procvičení:

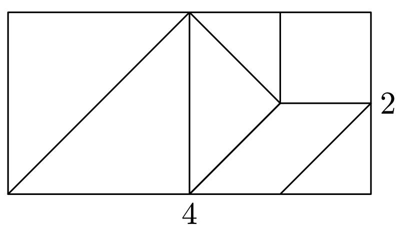
1. Určete všechna celá čísla n, pro která nabývá zlomek $\dfrac{4n+27}{n+3}$ celočíselné hodnoty. [$n \in \{-18, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 12\}$, číslo $n+3$ je dělitelem čísla 15.]
2. Nováková, Vaňková a Sudková vyhrály štafetu a kromě diplomů dostaly i bonboniéru, kterou hned po závodech sluply. Kdyby snědla Petra o 3 bonbóny více, snědla by jich právě tolik, co Míša s Janou dohromady. A kdyby si Jana pochutnala ještě na sedmi bonbónech, také by jich měla tolik, co druhé dvě dohromady. Ještě víme, že počet bonbónů, které snědla Vaňková, je dělitelný třemi a že Sudková si smlsla na sedmi bonbónech. Jak se děvčata jmenovala? Kolik bonbónů snědla každá z nich? [56–Z9–II–3]

4. *Tangram je skládačka, kterou lze vyrobit z papíru rozřezáním vystřiženého čtverce na sedm dílů podle čar vyznačených na obrázku. Předpokládejme, že délka strany*



čtverce je $2\sqrt{2}$ cm. Rozhodněte, zda lze z dílů tangramu složit:
a) obdélník 2 cm $\times$ 4 cm,
b) obdélník $\sqrt{2}$ cm $\times$ $4\sqrt{2}$ cm.

Řešení. a) Obdélník složit lze (obr. 2).



Obr. 2

b) Celková délka „iracionálních“ stran všech dílů tangramu je $10\sqrt{2}$ cm. Je tedy rovna obvodu obdélníku, který máme složit. Odtud a z textu pomocné úlohy 1 plyne, že všechny „iracionální“ strany dílů tangramu musejí být umístěny na hranici skládaného obdélníku. To však není možné, neboť protilehlé „iracionální“ strany kosodélníkového dílu mají vzdálenost menší než 1 cm, kdežto nejmenší vzdálenost protilehlých stran obdélníku je $\sqrt{2}$ cm.

Závěr: Obdélník 2 cm × 4 cm lze z tangramu složit, ale obdélník $\sqrt{2}$ cm × $4\sqrt{2}$ cm složit nelze.

ÚLOHY K PROCVIČENÍ:

1. Dokažte, že pro celá nezáporná čísla a, b, c, d platí: Délku úsečky lze vyjádřit ve tvaru $a + b\sqrt{2}$ a současně ve tvaru $c + d\sqrt{2}$, právě když $a = c$ a $b = d$. [Rovnost $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ je ekvivalentní se vztahem $a - c = (d - b)\sqrt{2}$, jehož levá strana je celé číslo, kdežto pravá strana je pro $d \neq b$ iracionální. Rovnost nastává, jen když platí $a = c$ a $b = d$.]
2. Dokažte, že z tangramu nelze složit kosodélník se základnou délky 2 cm a výškou 4 cm. [Z dílů tangramu lze sestavit pouze ty úhly, jejichž velikost je násobkem 45°. Proto má kosodélník velikosti vnitřních úhlů 45° a 135°. Má-li výšku 4 cm, má jeho delší strana délku $4\sqrt{2}$ cm. Tangram má sedm dílů, z nichž jedině čtverec má všechny strany celočíselné délky. Podél obou delších stran kosodélníku je proto nutno umístit po jedné „iracionální“ straně každého ze šesti zbývajících „iracionálních“ dílů. Zbydou tak právě dvě strany délky $\sqrt{2}$ cm, jež musejí být uvnitř skládaného kosodélníku. Jedna z nich zřejmě patří dílu tvaru kosodélníku (neboť ten nemůže mít pro svou malou výšku obě protilehlé „iracionální“ strany na hranici skládaného obrazce), druhá dílu tvaru trojúhelníku s „iracionálními“ odvěsnami. V důsledku věty z předchozí úlohy musí být tyto strany umístěny podél téže přímky. To však není možné, protože mohou být umístěny jedině ve směrech navzájem kolmých.]
3. Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž platí $a + b\sqrt{5} = b + a\sqrt{5}$. [56–C–I–1]
4. Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, jejichž rozdíl $a - b$ je pátou mocninou některého prvočísla a pro něž platí $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$. [56–C–S–3]
5. Najděte všechny dvojice (a, b) nezáporných reálných čísel, pro které platí

$$\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{b^2 + a} = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a + b}.$$

[48–C–S–1]

5. *Ve skupině n lidí ($n \geqq 4$) se někteří znají. Vztah „znát se“ je vzájemný: jestliže osoba A zná osobu B, pak také B zná A a nazýváme je dvojicí známých.*

a) Jestliže mezi každými čtyřmi osobami jsou aspoň čtyři dvojice známých, pak každé dvě osoby, které se neznají, mají společného známého. Dokažte.

b) Zjistěte, pro která $n \geqq 4$ existuje skupina osob, v níž jsou mezi každými čtyřmi osobami aspoň tři dvojice známých a současně se některé dvě osoby neznají ani nemají společného známého.

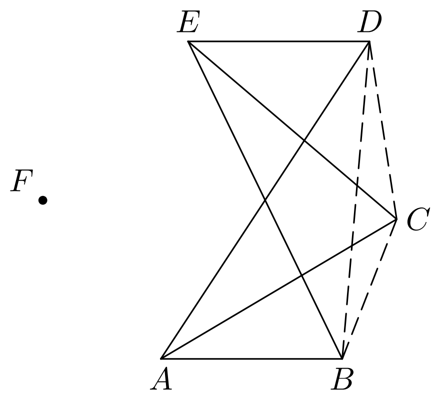
c) Rozhodněte, zda ve skupině šesti osob mohou být v každé čtveřici právě tři dvojice známých a právě tři dvojice neznámých.

ŘEŠENÍ. a) Označme A, B dvě osoby, jež se neznají, a přidejme k nim libovolné další dvě osoby X a Y. Kdyby ani osoba X, ani osoba Y nebyla společným známým osob A a B, měli bychom ze všech šesti dvojic ve čtveřici $ABXY$ aspoň tři dvojice neznámých: dvojici AB, dvojici AX nebo BX a dvojici AY nebo BY. Dvojice známých ve čtveřici $ABXY$ by tak byly nejvýše tři, což odporuje předpokladu ze zadání části a). Tím je část a) dokázána.

b) Skupina požadovaných vlastností existuje pro všechna $n \geqq 4$. Jako příklad stačí zvolit skupinu, v níž se osoba A nezná s nikým a ostatní se znají navzájem. Pak existuje dokonce $n - 1$ dvojic osob, které se ani neznají, ani nemají společného známého, a mezi každými čtyřmi osobami jsou aspoň tři dvojice známých.

c) Budeme předpokládat, že šestice osob s popsanou vlastností existuje. Využijeme grafických znázornění, v nichž osoby zakreslíme jako body. Plnou (resp. čárkovanou) úsečkou, kterou některé dva z těchto bodů spojíme, vyznačíme dvojici známých (resp. dvojici neznámých).

Z každého bodu grafického znázornění skupiny šesti osob vychází právě pět úseček. Podle Dirichletova principu jsou proto aspoň tři úsečky, jež vycházejí z téhož bodu, stejného typu (jsou buď čárkované, nebo plné). Označme body A, B, C, D, E a F tak, aby byly téhož typu úsečky AB, AC a AD, a předpokládejme nejprve, že označují dvojice známých. Ve čtveřici $ABCD$ jsou však podle předpokladu právě tři dvojice neznámých, a proto je trojúhelník BCD v grafickém znázornění zakreslen čárkovaně. Ve čtveřici $BCDE$ pak úsečky EB, EC, ED nutně představují dvojice známých (obr. 3). Odtud plyne, že ve čtveřici $ABDE$ jsou aspoň čtyři dvojice známých, které na obr. 3 znázorňují úsečky AB, AD, EB a ED, což odporuje našemu předpokladu. Případ, kdy úsečky AB, AC a AD představují dvojice neznámých, vede ke sporu analogicky (v předchozích úvahách stačí zaměnit vztahy *znát se* a *neznat se* a samozřejmě i čárkované a nečárkované úsečky).



Obr. 3

Závěr části c): Neexistuje skupina šesti osob, která má v každé své čtveřici právě tři dvojice známých a právě tři dvojice neznámých.

Úlohy k procvičení:

1. Ve skupině pěti osob se v každé čtveřici vyskytují právě tři dvojice známých.
   a) Dokažte, že ve skupině nemůže být trojice osob, které se znají navzájem (tzv. trojúhelník známých), ani osoba, která má aspoň tři známé.
   b) Dokažte, že zde nemůže být trojúhelník neznámých ani člověk, který se nezná aspoň se třemi osobami.
   c) Nakreslete graf známostí v takové skupině osob.

6. *Klárka měla na papíru napsáno trojmístné číslo. Když ho správně vynásobila devíti, dostala čtyřmístné číslo, jež začínalo touž číslicí jako číslo původní, prostřední dvě číslice se rovnaly a poslední číslice byla součtem číslic původního čísla. Které čtyřmístné číslo mohla Klárka dostat?*

Řešení. Hledejme původní číslo $x = 100a+10b+c$, jehož číslice jsou a, b, c. Číslici, která se vyskytuje na prostředních dvou místech výsledného součinu, označme d. Ze zadání plyne:

$$9(100a + 10b + c) = 1\,000a + 100d + 10d + (a + b + c), \tag{1}$$

přičemž výraz v poslední závorce představuje číslici shodnou s poslední číslicí součinu $9c$. To ovšem znamená, že nemůže být $c \geqq 5$: pro takové c totiž končí číslo $9c$ číslicí nepřevyšující 5, a protože $a \neq 0$, platí naopak $a + b + c > c \geqq 5$.

Také zřejmě je $c \neq 0$ (v opačném případě by platilo $a = b = c = x = 0$). Ostatní možnosti vyšetříme sestavením následující tabulky.

c	$9c$	$a+b+c$	$a+b$
1	9	9	8
2	18	8	6
3	27	7	4
4	36	6	2

Tabulka 1

Rovnost (1) lze přepsat na tvar

$$100(b - a - d) = 10d + a + 11b - 8c. \tag{2}$$

Hodnota pravé strany je aspoň -72 a menší než 200, neboť každé z čísel a, b, c, d je nejvýše rovno devíti. Je tedy buď $b - a - d = 0$, nebo $b - a - d = 1$.

V prvním případě po substituci $d = b-a$ upravíme vztah (2) na tvar $8c = 3(7b-3a)$, z nějž vidíme, že c je násobkem tří. Z tabulky 1 pak plyne $c = 3$, $a = 4 - b$, což po dosazení do rovnice $8c = 3(7b - 3a)$ vede k řešení $a = b = 2$, $c = 3$. Původní číslo je tedy $x = 223$ a jeho devítinásobek $9x = 2\,007$.

Ve druhém případě dosadíme $d = b-a-1$ do (2) a zjistíme, že $8c+110 = 3(7b-3a)$. Výraz $8c + 110$ je tudíž dělitelný třemi, proto číslo c dává při dělení třemi zbytek 2. Dosazením jediných možných hodnot $c = 2$ a $b = 6 - a$ do poslední rovnice zjistíme, že $a = 0$, což odporuje tomu, že číslo $x = 100a + 10b + c$ je trojmístné.

Závěr: Klárka obdržela čtyřmístné číslo 2 007.

Poznámka. Tabulka 1 nabízí jednodušší, ale numericky pracnější postup přímého dosazování všech přípustných hodnot čísel a, b, c do rovnice (1). Počet všech možností lze omezit na deset odhadem $b \geqq a$, který zjistíme pomocí vhodné úpravy vztahu (1) — například na tvar (2). Řešení uvádíme v tabulce 2.

a	1	2	3	4	1	2	3	1	**2**	1
b	7	6	5	4	5	4	3	3	**2**	1
c	1	1	1	1	2	2	2	3	**3**	4
$9x$	1 539	2 349	3 159	3 969	1 368	2 178	2 988	1 197	**2 007**	1 026

Tabulka 2

Úlohy k procvičení:

1. K přirozenému číslu m zapsanému stejnými číslicemi jsme přičetli čtyřmístné přirozené číslo n. Získali jsme čtyřmístné číslo s opačným pořadím číslic, než má číslo n. Určete všechny takové dvojice čísel m a n. [52–C–I–5]
2. Žáci měli vypočítat příklad $x + y \cdot z$ pro trojmístné číslo x a dvojmístná čísla y, z. Martin umí násobit a sčítat čísla zapsaná v desítkové soustavě, ale zapomněl na pravidlo přednosti násobení před sčítáním. Proto mu vyšlo sice zajímavé číslo, které se čte stejně zleva doprava jako zprava doleva, správný výsledek byl ale o 2 004 menší. Určete čísla x, y, z. [53–C–II–4]