57. ročník matematické olympiády
III. kolo kategorie A

České Budějovice, 9.–12. března 2008

1. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} x + y^2 &= y^3, \\ y + x^2 &= x^3. \end{aligned}$$

(Jaroslav Švrček)

Řešení. Odečtením první rovnice od druhé dostaneme

$$\begin{aligned} (x^3 - y^3) - (x^2 - y^2) + (x - y) &= 0, \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Druhý činitel je kladný pro jakákoliv reálná čísla x a y, neboť

$$x^2 + xy + y^2 - x - y + 1 = \tfrac{1}{2}(x+y)^2 + \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{2}(y-1)^2$$

a základy všech tří druhých mocnin nemohou být rovny nule současně. Proto pro každé řešení (x, y) dané soustavy musí platit $x - y = 0$ neboli $y = x$, což redukuje soustavu na jedinou rovnici $x + x^2 = x^3$ s kořeny $x_1 = 0$ a $x_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

Řešeními jsou právě tři dvojice (x, y), kde $y = x \in \{0, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\}$.

Jiné řešení. Vyjádření $y = x^3 - x^2$ z druhé rovnice dosadíme do rovnice první. Dostaneme rovnici $x + (x^3 - x^2)^2 = (x^3 - x^2)^3$, po úpravě

$$x^9 - 3x^8 + 3x^7 - 2x^6 + 2x^5 - x^4 - x = 0.$$

To je sice rovnice 9. stupně, ale pomůže nám taková úvaha: případu $x = y$ odpovídá jediná rovnice $x + x^2 = x^3$, proto získaný mnohočlen stupně 9 *musí být dělitelný* mnohočlenem $x^3 - x^2 - x$. Vydělením přejdeme k rovnici v součinovém tvaru

$$(x^3 - x^2 - x)(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1) = 0.$$

Druhý činitel je však kladný pro jakékoliv reálné číslo x, neboť

$$x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = (x^3 - x^2)^2 + (x^2 - x)^2 + (x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}.$$

První složka x každého řešení (x, y) proto musí splňovat rovnici $x^3 - x^2 - x = 0$. Zbytek řešení je nasnadě.

Jiné řešení. Ještě jedním způsobem dokážeme, že $x = y$. Připusťme, že existuje řešení s vlastností $x > y$ (opačný případ je symetrický). Pak z rovností $x = y^3 - y^2$ a $y = x^3 - x^2$ plyne $y^3 - y^2 > y$ a $x^3 - x^2 < x$, tedy $P(y) > 0$ a $P(x) < 0$, kde P je polynom $P(x) = x^3 - x^2 - x$ s rozkladem $P(x) = x(x - x_2)(x - x_3)$, přitom $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) > 0$ a $x_3 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) < 0$. Nerovnosti $P(y) > 0$ a $P(x) < 0$ znamenají, že platí $y \in (x_3, 0) \cup (x_2, \infty)$ a $x \in (-\infty, x_3) \cup (0, x_2)$, což s ohledem na $x > y$ lze upřesnit na $y \in (x_3, 0)$ a $x \in (0, x_2)$. Přímo z $y < 0$ ovšem plyne nerovnost $y^3 - y^2 < 0$, tedy $x < 0$, což je ve sporu s tím, že $x \in (0, x_2)$.

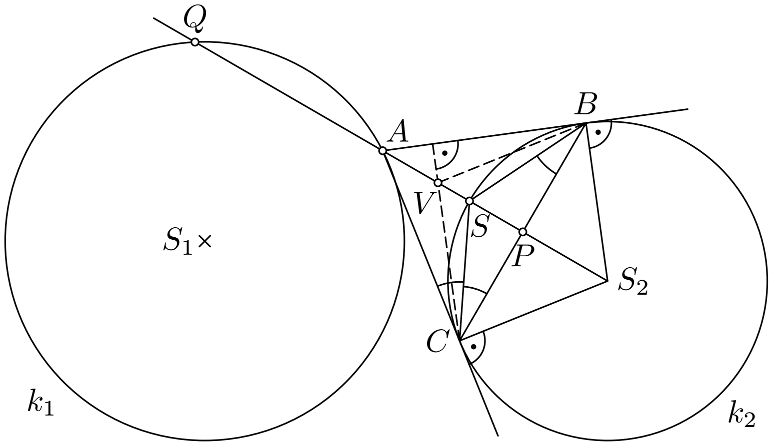
2. *Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$, přičemž $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vrcholem A na kružnici k_1 a vrcholy B, C na kružnici k_2 zvolenými tak, že obě přímky AB, AC jsou tečnami kružnice k_2. Najděte*

a) množinu středů kružnic vepsaných,

b) množinu průsečíků výšek

všech takových trojúhelníků ABC. *(Tomáš Jurík)*

Řešení. a) Bod A může být na kružnici k_1 vybrán *libovolně*, body B a C jsou pak nutně body dotyku obou polopřímek s počátkem A, které jsou tečné ke kružnici k_2 (obr. 1). Vzhledem k jejich symetrii je ABC rovnoramenný trojúhelník souměrný podle



Obr. 1

přímky AS_2. Středem kružnice jemu vepsané je průsečík S úsečky AS_2 s kružnicí k_2. Tento bod S totiž leží nejen na ose úhlu BAC, ale také na osách obou (souměrně sdružených) úhlů ABC a ACB, protože podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu platí $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle CBS|$ a ze symetrie $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle BCS|$. Obráceně, zvolíme-li na kružnici k_2 libovolně bod S tak, aby polopřímka S_2S proťala kružnici k_1 v aspoň jednom bodě, který označíme A a ke kterému sestrojíme podle první věty řešení vyhovující trojúhelník ABC, bude podle předchozích úvah bod S středem kružnice vepsané právě takovému trojúhelníku ABC. Hledanou množinou je tedy množina průsečíků kružnice k_2 se všemi úsečkami S_2A, kde bod A probíhá celou kružnici k_1. Je to zřejmě kratší z obou oblouků (včetně krajních bodů) kružnice k_2, které na ní vytínají obě polopřímky s počátkem S_2, jež se dotýkají kružnice k_1.

b) Dokážeme, že hledanou množinou je kružnice, která je obrazem kružnice k_1 ve stejnolehlosti se středem S_2 a kladným koeficientem

$$\lambda = \frac{2r_2^2}{|S_1S_2|^2 - r_1^2}.$$

Vysvětlíme totiž, proč ortocentrum V každého uvažovaného trojúhelníku ABC, jež z důvodu osové souměrnosti leží na polopřímce S_2A (díky ostrým úhlům ABC, ACB leží body A, V ve stejné polorovině s hranicí BC), je ve zmíněné stejnolehlosti obrazem druhého průsečíku Q polopřímky S_2A s kružnicí k_1, který — stejně jako první průsečík A — probíhá celou kružnici k_1 (v případě, kdy se polopřímka S_2A dotýká kružnice k_1, klademe $Q = A$). Potřebný vztah $|S_2V| : |S_2Q| = \lambda$ dostaneme vydělením rovností

$$|S_2A| \cdot |S_2Q| = |S_1S_2|^2 - r_1^2 \quad \text{a} \quad \tfrac{1}{2}|S_2V| \cdot |S_2A| = r_2^2,$$

které nyní zdůvodníme (a tak bude celý důkaz hotov).

První rovnost vyjadřuje (kladnou) mocnost bodu S_2 ke kružnici k_1. Druhá rovnost plyne z Eukleidovy věty o odvěsně S_2B pravoúhlého trojúhelníku S_2BA, protože střed P úsečky BC je nejen patou výšky z vrcholu A, ale také středem kosočtverce CS_2BV, tudíž

$$r_2^2 = |S_2B|^2 = |S_2P| \cdot |S_2A| = \tfrac{1}{2}|S_2V| \cdot |S_2A|.$$

---

3. *Zjistěte, pro která celá kladná čísla a, b je hodnota podílu*

$$\frac{b^2 + ab + a + b - 1}{a^2 + ab + 1}$$

rovna celému číslu. *(Martin Panák)*

Řešení. Ukážeme, že všechny vyhovující dvojice (a, b) jsou tvaru $(1, b)$, kde b je libovolné celé kladné číslo.

Označme $X = a^2 + ab + 1 = a(a + b) + 1$ a $Y = b^2 + ab + a + b - 1 = (b + 1)(a + b) - 1$. Dělí-li číslo X číslo Y, dělí i číslo

$$(b + 1)X - aY = (b + 1)[a(a + b) + 1] - a[(b + 1)(a + b) - 1] = a + b + 1,$$

které tudíž jako kladný násobek čísla X splňuje nerovnost

$$a + b + 1 \geqq X = a^2 + ab + 1.$$

Odtud po zrušení jednotek a dělení číslem $a + b$ dostaneme $1 \geqq a$, tedy nutně $a = 1$.

Naopak, je-li $a = 1$, je $X = b + 2$ a $Y = b^2 + 2b = b(b + 2)$, takže $X \mid Y$ platí.

---

4. *Rovnost*

$$2\,008 = 1\,111 + 666 + 99 + 88 + 44$$

je rozkladem čísla 2 008 na součet několika navzájem různých vícemístných čísel, z nichž každé je zapsáno stejnými číslicemi. Najděte

a) aspoň jeden takový rozklad čísla 8 002,

b) všechny takové rozklady čísla 8 002, které mají co nejmenší počet sčítanců (na jejich pořadí nebereme zřetel). *(Jaromír Šimša)*

Řešení. a) Příkladem hledaného rozkladu je rovnost

$$8\,002 = 3\,333 + 999 + 888 + 777 + 666 + 555 + 333 + 99 + 88 + 77 + 66 + 55 + 44 + 22.$$

V druhé části ukážeme, že je to jediný vyhovující rozklad čísla 2 008 na 14 sčítanců a že žádný takový rozklad na menší počet sčítanců neexistuje.

b) Číslo tvaru $\overline{aaaa}$, resp. $\overline{aaa}$, resp. $\overline{aa}$ je a-násobkem čísla 1 111, resp. 111, resp. 11. Proto každý uvažovaný rozklad čísla 8 002 můžeme po částečném sečtení („stejnomístných" sčítanců) zapsat ve tvaru

$$8\,002 = 1\,111k + 111l + 11m,$$

kde k, l, m jsou celá nezáporná čísla nepřevyšující hodnotu součtu $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ (neboť sčítaná „stejnomístná" čísla mají být navzájem různá).

Uvedenou rovnost přepíšeme do tvaru

$$8\,002 = 727 \cdot 11 + 5 = 11(101k + 10l + m) + l,$$
$$727 = 101k + 10l + m + \frac{l-5}{11}.$$

Odtud vychází (s ohledem na $l \leqq 45$), že $l = 11q + 5$, kde $q \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dostáváme tak rovnost

$$677 = 101 \cdot 6 + 71 = 101(k + q) + 10q + m,$$

z níž zřejmě plyne $k + q = 6$ a $10q + m = 71$. Tato soustava má za daných podmínek jediné řešení $q = 3$, $k = 3$ a $m = 41$. Pro l tak vychází $l = 38$.

K vytvoření hledaného rozkladu zbývá rozložit nalezená čísla k, l, m na součet jednoho či několika různých jednomístných sčítanců. Vzhledem k tomu, že na výběr máme právě devět sčítanců $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ se součtem 45, bude zřejmě jednodušší vypsat rozklady pro k, $45 - l$ a $45 - m$ (rozklady čísel l a m pak dostaneme vynecháním nalezených sčítanců ze součtu $1 + 2 + \ldots + 9$):

$$k = 3 = 1 + 2,$$
$$45 - l = 7 = 1 + 6 = 1 + 2 + 4 = 2 + 5 = 3 + 4,$$
$$45 - m = 4 = 1 + 3.$$

Našli jsme všech $2 \cdot 5 \cdot 2$ možných rozkladů čísla 8 002, jež mají požadované vlastnosti a z nichž každý má alespoň $1 + 6 + 7 = 14$ sčítanců, přičemž rozklad na 14 sčítanců je jediný a byl uveden v řešení části a).

---

5. *Karel v jistý okamžik na svých přesně jdoucích hodinkách zjistil, že konec velké ručičky, konec malé ručičky a vhodný bod na kružnici ciferníku tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Než tento jev nastal podruhé, uplynula doba t. Najděte největší možné t pro dané hodinky v závislosti na poměru k délek obou ručiček ($k > 1$), když poloměr kružnice ciferníku je shodný s délkou velké ručičky.*

(Jaromír Šimša)

Řešení. Ukážeme, že hledané největší t je rovno $4/11$ hod nezávisle na poměru k délek ručiček.

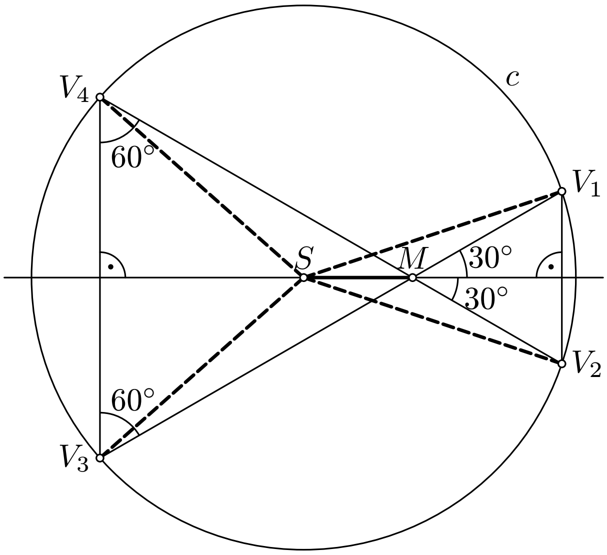
Označme c kružnici ciferníku, S její střed a M konec malé ručičky (obr. 2). Vysvětlíme nejprve, proč při pevné poloze bodu M existují právě dva rovnostranné trojúhelníky MXY s vrcholy X, Y na kružnici c. Protože přímka SM musí být osou tětivy XY, a tedy i osou úhlu XMY, svírají obě přímky MX, MY s přímkou SM úhel 30°. Proto je trojúhelník MXY totožný s jedním z rovnostranných trojúhelníků MV_1V_2, MV_3V_4 sestrojených na obr. 2.

Body V_i rozdělují kružnici c na čtyři oblouky. Obloukům V_2V_3 a V_4V_1 příslušejí obvodové úhly $V_2V_4V_3$, $V_1V_3V_4$ velikosti 60°. Proto podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí první dvě z rovností

$$|\sphericalangle V_2SV_3| = |\sphericalangle V_4SV_1| = 120° \quad \text{a} \quad |\sphericalangle V_1SV_2| + |\sphericalangle V_3SV_4| = 120°,$$

třetí rovnost je jejich důsledkem (dopočítáním podle plného úhlu u vrcholu S). Plyne z ní, že oba středové úhly V_1SV_2, V_3SV_4 jsou menší než 120°.

Můžeme si představit, že malá ručička hodinek je nehybná a velká ručička se kolem středu S otáčí úhlovou rychlostí $(360-30)° = 330°$ za hodinu. Jak jsme zjistili, zkoumaný



Obr. 2

jev nastane, právě když konec V velké ručičky splyne s jedním ze čtyř bodů V_i. Mezi dvěma po sobě jdoucími jevy se proto velká ručička otočí o úhel, který má ve dvou případech velikost $120°$ a ve zbylých dvou případech velikosti $|\sphericalangle V_1SV_2|$ a $|\sphericalangle V_3SV_4|$, které jsou menší než $120°$ (a závisí na poměru k). Nejdelší doba t je tedy na poměru k nezávislá a je rovna $120/330$ hod.

---

6. *Určete největší reálné číslo p a nejmenší reálné číslo q, pro něž nerovnosti*

$$p < \frac{a+t_b}{b+t_a} < q$$

platí v libovolném trojúhelníku ABC se stranami a, b a těžnicemi t_a, t_b.

(Pavel Novotný)

Řešení. Ukážeme, že hledaná čísla jsou $p = 1/4$ a $q = 4$. Stačí pouze zdůvodnit, že $q = 4$ (pak totiž $p = 1/4$, neboť záměna stran a, b mění hodnotu zkoumaného zlomku na převrácené číslo).

Podle trojúhelníkových nerovností platí

$$\tfrac{1}{2}a < b + t_a \quad \text{a} \quad \tfrac{1}{3}t_b < \tfrac{2}{3}t_a + \tfrac{1}{2}b.$$

První nerovnost vynásobíme dvěma, druhou třemi a pak je sečteme:

$$a + t_b < (2b + 2t_a) + \bigl(2t_a + \tfrac{3}{2}b\bigr) = \tfrac{7}{2}b + 4t_a < 4(b + t_a).$$

Požadovanou vlastnost má tedy každé číslo $q \geqq 4$; ukážeme ještě, že ji nemá žádné číslo $q < 4$. K tomu uvážíme rovnoramenný trojúhelník ABC, ve kterém $a = c = 1$ a $b \in (0, 2)$ (takový trojúhelník existuje pro libovolné b z uvedeného intervalu). Z obecných vzorců

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad t_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$

dostaneme $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2b^2}$ a $t_b = \frac{1}{2}\sqrt{4 - b^2}$, odkud

$$\frac{a + t_b}{b + t_a} = \frac{2 + \sqrt{4 - b^2}}{2b + \sqrt{1 + 2b^2}}.$$

Poslední zlomek může být pro malé kladné b libovolně blízký číslu 4. Vysvětlíme to takto: zvolíme-li $\varepsilon > 0$, pak pro všechna dostatečně malá kladná b současně platí

$$\sqrt{4-b^2} > 2-\varepsilon, \quad 2b < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sqrt{1+2b^2} < 1+\varepsilon,$$

takže

$$\frac{a+t_b}{b+t_a} > \frac{4-\varepsilon}{1+2\varepsilon},$$

a je snadné vybrat $\varepsilon > 0$ tak, aby byl poslední zlomek větší než jakékoliv předem zvolené q menší než 4. Stačí, aby platilo

$$\varepsilon < \frac{4-q}{1+2q}.$$