

49. mezinárodní matematická olympiáda

Hlavními organizátory 49. mezinárodní matematické olympiády, která se konala od 10. do 22. července v hlavním městě Španělska Madridu, bylo španělské Ministerstvo školství a sociální politiky a Královská matematická společnost Španělska.



Organizátoři připravili pro práci mezinárodní jury, jejímž hlavním úkolem je vybrat z připravených návrhů šestici soutěžních úloh, vynikající podmínky v kouzelném městečku San Ildefonso-La Granja v srdci Kastilie nedaleko Segovii (asi 80 km severozápadně od Madridu). Příjemnou nadmořskou výšku v blízkosti královského paláce a nádherných zahrad jsme dvojnásob ocenili po přesunu do rozpálených ulic Madridu, kam se mezitím sjel rekordní počet 535 soutěžících z 97 zemí celého světa (spolu s pozorovateli z Beninu a Sýrie a zástupci Pákistánu, jejichž studenti zůstali letos bohužel doma, když jim španělská ambasáda neposkytla včas víza, dosáhl počet formálně zúčastněných zemí stovky).

Letošní olympiádu zahájila cirkusová show za zvuků Fučíkova *Vjezdu gladiátorů*. Úvodní hrozba moderátora, že „dnes se spojí cirkusový svět se světem matematiky“ snad našla naplnění jen během úvodního defilé s národními vlajkami.

České družstvo, které bylo vybráno na základě výsledků ústředního kola 57. ročníku MO v Českých Budějovicích a následné týdenní přípravy v Kostelci nad Černými lesy, tvořili *Tomáš Hřebejk* z 8. ročníku Gymnázia v Praze 4, *Miroslav Klimoš* z 3. ročníku Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci, *Jan Matějka* ze 7. ročníku Gymnázia v Českých Budějovicích v Jírovcově ulici, *Samuel Říha* ze 3. ročníku Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Josef Tkadlec* a *Jakub Töpfer*, oba ze 7. ročníku Gymnázia Jana Keplera v Praze 6. Vedoucím družstva byl RNDr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd v Praze a studenty doprovázel RNDr. *Martin Panák*, Ph.D., z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně.

Vlastní soutěž se odehrála v jedné obrovské aule 16. a 17. července, kdy soutěžící jako obvykle řešili vždy po trojici soutěžních úloh. Na to měli pokaždé vyhrazeno přesně 4,5 hodiny; za každou ze šesti úloh mohli získat nejvýše 7 bodů.

Naši reprezentanti podali standardní výkon (až na jednoho vyřešili všichni nejlépejší první úlohu a skoro stejně dobře se vypořádali i s druhou z lehčích úloh – úlohou čtvrtou). Jediný, kdo si v každém soutěžním dnu poradil se dvěma úlohami, byl *Miroslav Klimoš*, který tak po bronzu ze 48. MMO rozšířil svou sbírku o stříbrnou medaili. Další medaili pro náš tým získal *Josef Tkadlec*, od něhož jsme však po vítězství v celostátním kole čekali trochu víc. Výsledky našich jsou shrnuty v následující tabulce:

Umístění	Body za úlohu						Cena
	1	2	3	4	5	6	
424.–447. Tomáš Hřebejk	1	0	0	4	0	0	5
64.–70. Miroslav Klimoš	7	7	0	7	7	0	28 II.
268.–283. Jan Matějka	7	2	0	4	1	0	14 HM
368.–391. Samuel Říha	7	0	0	1	0	0	8 HM
212.–237. Josef Tkadlec	7	1	0	6	1	1	16 III.
268.–283. Jakub Töpfer	7	0	0	7	0	0	14 HM
Celkem	36	10	0	29	9	1	85

Další tři naši studenti se museli spokojit pouze se základním oceněním, kterým je tzv. *Honorary mention* a které se uděluje studentům bez medaile za úplné vyřešení alespoň jedné z nelehké šestice soutěžních úloh; jejich obtížnost si konečně můžete ověřit sami. Pro srovnání uvedme i výsledky slovenských reprezentantů, kteří získali jen o pár bodů méně:

Umístění	Body za úlohu						Cena
	1	2	3	4	5	6	
407.–423. Miroslav Baláž	2	0	0	4	0	0	6
346.–367. Albert Herencsár	5	0	0	4	0	0	9
284.–296. Tomáš Kocák	7	1	0	4	1	0	13 HM
238.–267. Filip Sládek	7	1	0	7	0	0	15 III.
199.–211. Michal Spišiak	7	2	0	7	1	0	17 III.
212.–237. Vladislav Ujházi	5	4	0	7	0	0	16 III.
Celkem	33	8	0	33	2	0	76

V neoficiálním pořadí všech zúčastněných zemí jsme jen taktak obhájili pozici v první čtyřicítce (spolu s Argentinou a Řeckem jsme se

podělili o 39.–41. příčku). Počet získaných cen a celkový bodový zisk jednotlivých zemí vyčtete z připojené tabulky (čísla v závorce označují nižší počet reprezentantů):

	I	II	III	body		I	II	III	body
ČLR	5	1	0	217	Bosna a Hercegovina	0	0	3	68
Rusko	6	0	0	199	Slovinsko	0	0	2	68
USA	4	2	0	190	Švýcarsko	0	1	1	68
Korea	4	2	0	188	Švédsko	0	1	0	67
Írán	1	5	0	181	Dánsko	0	2	0	66
Thajsko	2	3	1	175	Kostarika	0	0	2	65
KLDR	2	4	0	173	Malajsie	0	1	0	65
Turecko	3	1	2	170	Rakousko	0	0	1	63
Tchaj-wan	2	4	0	168	Norsko	1	0	0	62
Maďarsko	2	3	1	165	Belgie	0	1	1	61
Japonsko	2	3	1	163	Makedonie	0	0	2	61
Vietnam	2	2	2	159	Lucembursko (5)	0	0	2	60
<i>Polsko</i>	2	3	1	157	Tádžikistán	0	0	1	60
Bulharsko	2	1	3	154	Lotyšsko	0	1	0	58
Ukrajina	2	2	2	153	Macao	0	0	2	58
Brazílie	0	5	1	152	Maroko	0	0	1	58
Peru	1	3	2	141	Arménie	0	0	0	56
Rumunsko	0	4	2	141	Portugalsko	0	0	2	55
Austrálie	0	5	1	140	Albánie	0	0	1	53
Německo	1	2	3	139	Chile (3)	0	1	1	49
Srbsko	1	3	0	139	Írsko	0	0	0	45
Kanada	0	2	4	135	Kypr	0	0	1	42
Velká Británie	0	4	2	133	Nový Zéland	0	0	0	42
Itálie	0	3	3	132	Estonsko	0	0	1	41
Kazachstán	1	2	3	128	Finsko	0	0	1	40
Bělorusko	0	3	2	125	Bangladéš (4)	0	0	0	33
Izrael	1	1	2	120	Island (5)	0	0	1	31
Hongkong	0	3	1	107	Salvador (4)	0	0	0	31
Mongolsko	0	2	1	106	Srí Lanka	0	0	0	29
Francie	0	1	4	104	Kirgizie (5)	0	0	0	28
Indie	0	0	5	103	Trinidad a Tobago	0	0	1	28
Singapur	0	1	3	98	Kuba (1)	0	1	0	27
Nizozemsko	0	2	2	94	Ekvádor	0	0	0	26
Uzbekistán	0	0	4	94	Kambodža	0	0	0	25
Litva	0	1	2	92	Černá hora (3)	0	0	0	24
Indonézie	0	1	2	88	Paraguay (4)	0	0	1	24
Mexiko	0	1	1	87	Filipíny (3)	0	0	1	23
Chorvatsko	0	0	3	86	Uruguay (5)	0	0	0	22
Argentina	0	1	3	85	Tunisko (4)	0	0	0	20
<i>Česká republika</i>	0	1	1	85	Honduras (2)	0	0	0	17
Řecko	0	0	2	85	Guatemala (4)	0	0	1	16
Gruzie	0	0	5	84	Lichtenštejnsko (2)	0	0	0	16
Španělsko	0	0	3	82	Venezuela (2)	0	0	0	16
JAR	0	1	0	79	Portoriko (3)	0	0	0	9
Kolumbie	0	2	0	77	Saudská Arábie	0	0	0	8
<i>Slovensko</i>	0	0	3	76	Bolívie (5)	0	0	0	5
Turkmenistán	0	0	4	76	SAE (4)	0	0	0	5
Ázerbájdžán	0	0	3	74	Kuvajt (5)	0	0	0	3
Moldavsko	0	1	0	74					

Vynikající organizace se projevila i v bohaté náplni volného času jak studentů, tak jejich vedoucích. O tom svědčí zejména výlety do Segovii (která se kromě jiného může pochlubit i zbytky nádherného římského akvaduktu), El Escorialu a Toleda, v Aranjuez návštěva kulturního večera s vynikající představitelkou tradičního flamenca Mercedes Ruiz, pro studenty pak navíc možnost navštívit v Madridu světoznámou galerii Prado a dlouhá řada soutěží a aktivit.

Slavnostního zakončení olympiády v aule Univerzity Carlose III. se mimo jiné zúčastnilo i Jeho královské veličenstvo princ Felipe de Asturias se svou chotí princeznou Letiziou. Spolu s dalšími představiteli rozdali celkem 267 medailí všem, kteří v nelehkém klání získali alespoň 15 bodů. Mezi nimi bylo 100 studentů, kteří za 22–30 bodů získali stříbrnou medaili, a 47 nejúspěšnějších, kteří za zisk alespoň 31 bodu byli oceněni medailí zlatou. Mezi nimi vynikli tři Číňani Xiaosheng Mu, Dongyi Wei (oba ČLR) a Alex Zhai (USA), kteří bezchybně vyřešili všech šest úloh.

Hostitelskými zeměmi příštích olympiád budou Německo (jubilejní 50. ročník), Kazachstán, Holandsko a Argentina.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek. Kružnice procházející bodem H se středem ve středu strany BC protíná přímku BC v bodech A_1 a A_2 . Podobně kružnice procházející bodem H se středem ve středu strany CA protíná přímku CA v bodech B_1 a B_2 a kružnice procházející bodem H se středem ve středu strany AB protíná přímku AB v bodech C_1 a C_2 . Ukažte, že body $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leží na jedné kružnici. (Rusko)

2. (a) Dokažte, že

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

pro všechna reálná čísla x, y, z různá od 1 a splňující rovnost $xyz = 1$.

(b) Dokažte, že v uvedené nerovnosti platí rovnost pro nekonečně mnoho trojic racionálních čísel x, y, z různých od 1 a splňujících rovnost $xyz = 1$. (Rakousko)

3. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho kladných celých čísel n , pro něž má číslo $n^2 + 1$ prvočinitel větší než $2n + \sqrt{2n}$. (Litevsko)

4. Najděte všechny funkce $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ takové, že

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

pro všechna kladná reálná čísla w, x, y, z splňující rovnost $wx = yz$.

(*Jižní Korea*)

5. Necht n a k jsou kladná celá čísla, kde $k \geq n$ a $k - n$ je sudé číslo. Je dáno $2n$ lamp označených čísly $1, 2, \dots, 2n$, přičemž každá z nich může být *zapnutá* či *vypnutá*. Na počátku jsou všechny lampy vypnuté. Uvažujme posloupnosti *kroků*: v každém kroku jednu z lamp přepneme (vypnutou zapneme či zapnutou vypneme).

Označme N počet všech takových posloupností k kroků, jež vedou do stavu, kdy všechny lampy 1 až n jsou zapnuté a všechny lampy $n + 1$ až $2n$ jsou vypnuté.

Označme M počet všech takových posloupností k kroků, jež vedou do stavu, kdy všechny lampy 1 až n jsou zapnuté a všechny lampy $n + 1$ až $2n$ jsou vypnuté, přičemž žádná z lamp $n + 1$ až $2n$ nebyla nikdy zapnutá.

Určete podíl N/M .

(*Francie*)

6. Necht $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $|BA| \neq |BC|$. Označme ω_1 a ω_2 kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a ADC . Předpokládejme, že existuje kružnice ω , jež se dotýká polopřímky BA za bodem A , polopřímky BC za bodem C a zároveň i obou přímk AD a CD . Dokažte, že společné vnější tečny kružnic ω_1 a ω_2 se protínají v bodě kružnice ω .

(*Rusko*)