2. Středoevropská matematická olympiáda

Druhý ročník Středoevropské matematické olympiády (Middle European Mathematical Olympiad – MEMO) se uskutečnil ve dnech 4.–10. září 2008 v Olomouci pod záštitou rektora Univerzity Palackého *prof. RNDr. Lubomíra Dvořáka, CSc.* Soutěže se zúčastnilo 52 studentů z devíti zemí střední Evropy, jmenovitě České republiky, Chorvatska, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska. Jedním z cílů této soutěže je umožňit mladým talentovaným matematikům poprvé poznat atmosféru mezinárodní soutěže. Do reprezentačních družstev byli přitom vybráni pouze soutěžící, kteří jsou ve školním roce 2008/2009 ještě studenty středních škol a v roce 2008 nebyli členy reprezentačního družstva na Mezinárodní matematické olympiádě (IMO).

České reprezentační družstvo pro 2. ročník MEMO bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola 57. ročníku české MO. Jeho členy se stali nejlepší řešitelé z nematuritních ročníků středních škol, kteří se nedostali do reprezentačního družstva pro 49. IMO. Do družstva České republiky tak byli nominováni *David Klaška* (2/4 G v Brně, tř. Kpt. Jaroše), *Jiří Marek* (3/4 G v Brně, tř. Kpt. Jaroše), *Van Nhan Nguyen* (7/8 G v Praze 6, Nad Alejí), *Tomáš Pavlík* (7/8 GJK v Praze 6, Parléřova), *Hana Šormová* (3/4 G v Brně, tř. Kpt. Jaroše) a *Jan Vaňhara* (3/4 GLJ Holešov, Palackého). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *Mgr. Martin Panák, Ph.D.* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně. Jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *RNDr. Karel Horák, CSc.* z Matematického ústavu AV ČR v Praze.

Středoevropská olympiáda se letos konala v České republice a její organizátoři v čele s *RNDr. Jaroslavem Švrčkem, CSc.* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci odvedli pořádný kus práce, aby Českou republiku představili v co nejlepším světle. To se jim podle reakce účastníků podařilo v míře vrchovaté. Je nutno poděkovat celému týmu organizátorů, který se věnoval přípravě soutěže, staral se o zajištění jejího průběhu, pečoval o pohodlí účastníků a zajišťoval koordinaci soutěžních úloh.

Účastníci soutěže byli ubytováni ve vysokoškolských kolejích Univerzity Palackého a samotná soutěž probíhala ve fyzikálním pavilonu Přírodovědecké fakulty UP. Atraktivní byl rovněž doprovodný program soutěže, kdy se účastníci seznámili s historií a pamětihodnostmi Olomouce a blízkého okolí. Mimo „arcibiskupského“ zámku v Kroměříži také navštívili Javoříčské jeskyně a obdivovali hrad Bouzov.

Soutěžícím byly jako vždy předloženy dvě čtveřice úloh, jedna pro soutěž jednotlivců, druhá pro soutěž družstev. Tyto úlohy vybrala mezinárodní jury na svém zasedání před zahájením soutěže pod vedením předsedy komise pro přípravu úloh *doc. RNDr. Jaromíra Šimši, CSc.* Jednání jury řídil a moderoval *RNDr. Karel Horák, CSc.* Na vypracování řešení první čtveřice úloh měl každý soutěžící 5 hodin čistého času a za každou úlohu mohl získat nejvýše 8 bodů.

Druhou čtveřici úloh řešily jednotlivé národní týmy společně, opět po dobu pěti hodin a opět každý příklad byl ohodnocený nejvýše 8 body.

V soutěži jednotlivců byli zlatými medailemi oceněni účastníci, kteří získali plný počet 32 bodů, mezi nimi byli tři maďarští soutěžící, a po jednom soutěžícím z Polska a Německa. Uveďme alespoň pro představu počty zlatých, stříbrných, bronzových medailí a počty čestných uznání vybojovaných jednotlivými družstvy v soutěži jednotlivců. Všechny týmy měly šest soutěžících kromě Slovinska (4 studenti). Česká republika (0–1–1–1), Chorvatsko (0–0–3–1), Maďarsko (3–3–0–0), Německo (1–3–1–1), Polsko (1–4–1–0), Rakousko (0–0–3–1), Slovensko (0–0–2–4), Slovinsko (0–0–0–1), Švýcarsko (0–0–3–2). Z českého týmu zabojoval *David Klaška*, který se ziskem 24 bodů obsadil jedenácté místo a získal stříbrnou medaili. Pěkného výsledku dosáhl *Tomáš Pavlík* (19 b.), obsadil 24. místo a získal bronzovou medaili. Za zmínku ještě stojí čestné uznání pro *Jiřího Marka* (13 b., 37. místo). V soutěži družstev získaly prvenství týmy Maďarska, Polska a Německa s plným bodým ziskem. Český tým skončil na 7. místě se ziskem 22 bodů. Podrobnější výsledky můžete najít na českých internetových stránkách této soutěže na adrese www.kag.upol.cz/memo.

Na závěr ještě uvádíme zadání všech osmi soutěžních úloh spolu se zeměmi, které je navrhly.

Soutěž jednotlivců

6. září 2008

1. Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných celých čísel taková, že $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \geq 1$. Předpokládejme, že pro libovolnou čtveřici indexů (i, j, k, l), kde $1 \leq i < j \leq k < l$ a $i + l = j + k$, platí nerovnost $a_i + a_l > a_j + a_k$. Určete nejmenší možnou hodnotu členu a_{2008}. (*Rakousko*)

2. Uvažujme šachovnici $n \times n$, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Kolika způsoby na ni můžeme rozmístit $2n - 2$ identických kamenů (každý kámen leží na jiném poli) tak, že žádné dva kameny neleží na stejné diagonále? (Dva kameny leží na stejné diagonále, jestliže přímka spojující středy odpovídajících polí je rovnoběžná s některou z úhlopříček šachovnice.) (*Švýcarsko*)

3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC s rameny BC a AC. Kružnice mu vepsaná se dotýká stran AB a BC po řadě v bodech D a E. Přímka různá od AE a procházející bodem A protíná kružnici vepsanou v bodech F a G. Přímka AB pak protíná přímky EF a EG po řadě v bodech K a L. Dokažte, že $|DK| = |DL|$. (*Maďarsko*)

4. Nalezněte všechna celá k taková, že čísla $4n + 1$ a $kn + 1$ jsou nesoudělná pro libovolné celé n. (*Maďarsko*)

Soutěž družstev
7. září 2008

1. Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. (*Švýcarsko*)

2. Buď $n \geq 2$ přirozené číslo. Na tabuli je napsáno n čísel. V každém kroku vybereme na tabuli dvě čísla a každé z nich nahradíme jejich součtem. Určete všechna n, pro která můžeme vždy po konečném počtu kroků dostat n stejných čísel. (*Slovensko*)

3. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník a nechť body E, D jsou takové, že body B a E leží v opačných polorovinách určených přímkou AC a bod D leží uvnitř úsečky AE. Dále nechť $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CDE|$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ECD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EBA|$. Dokažte, že body B, C a E leží na jedné přímce. (*Slovinsko*)

4. Jestliže je součet kladných dělitelů kladného celého čísla n mocninou čísla 2 s celočíselným exponentem, pak je i jejich počet mocninou čísla 2 s celočíselným exponentem. Dokažte. (*Česká republika*)