50. Mezinárodní matematická olympiáda

Martin Panák, MU Brno

Jubilejní padesátý ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 10. do 22. července 2009 v německém svobodném hansovním městě Brémy, které společně s nedalekým přístavním městem Bremerhaven tvoří nejmenší ze šestnácti spolkových zemí Německa. Olympiády se zúčastnilo 565 soutěžících ze 104 zemí, což jsou nové účastnické rekordy, a bylo to vůbec poprvé, co se počet zúčastněných zemí vyšplhal nad magickou hranici 100. Nově se soutěže zúčastnila družstva Beninu, Mauretánie, Sýrie a Zimbabwe.

České družstvo tvořili tito soutěžící: *David Klaška* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Jan Matějka* z Gymnázia na Jírovcově ulici v Českých Budějovicích, *Josef Ondřej* z Gymnázia v Rožnově pod Radhoštěm, *Samuel Říha* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Josef Tkadlec* z Gymnázia Jana Keplera v Praze 6 a *Jan Vaňhara* z Gymnázia Ladislava Jaroše v Holešově. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl *dr. Jaroslav Švrček* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *dr. Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně.

Slavnostního zahájení olympiády se zúčastnila celá řada osobností společenského a politického života v Brémách a Německu, účastníci mohli shlédnout i videopozdrav kancléřky Spolkové republiky Německo *Angely Merkelové*.

Vlastní soutěž se konala ve dvou soutěžních dnech, 15. a 16. července, v jednom z pavilonů výstaviště v Bremách. Každý z těchto dnů měli řešitelé 4,5 hodiny času na vypracování tří úloh, přičemž za každou úlohu mohli získat až 7 bodů.

V neděli 19. července pak organizátoři uspořádali v brémském hudebním divadle slavnostní odpoledne u příležitosti 50. ročníku Mezinárodní matematické olympiády (první ročník se uskutečnil v roce 1959 v Rumunsku). Vrcholem oslav byla vystoupení šesti předních světových matematiků, mimo jiné zlatých medailistů z předchozích mezinárodních matematických olympiád, přičemž tři z nich jsou držiteli prestižní Fieldsovy medaile. Byli to *Béla Bollobás*, *Timothy Gowers*, *László Lovász*, *Stanislav Smirnov*, *Terence Tao* a *Jean-Christophe Yoccoz*. Zmínění pánové promluvili jak o svých výsledcích tak o rozdílech mezi řešením úloh na matematické olympiádě a skutečným výzkumem v matematice.

Na předposlední den pobytu naplánovali němečtí organizátoři pro všechny účastníky jednodenní výlet na ostrov Wangerooge v Severním moři, který byl 26. 6. 2009 začlenen do seznamu přírodních památek UNESCO.

Slavnostního zakončení olympiády spojeného s oficiálním předáním medailí nejlepším soutěžícím se kromě výše uvedených matematiků zúčastnila i ministyně školství a výzkumu SRN *Annette Schavanová*, a další významní představitelé společenského života v Brémách. Závěrečný ceremoniál v brémské koncertní síni Glocke také ozdobila provedením závěrečné části 1. symfonie Ludwiga van Beethovena renomovaná Německá komorní filharmonie (se sídlem v Brémách).

Co se týče vlastního vystoupení českého družstva, tak každý z našich reprezentantů si domů odvezl nějaké ocenění. Stříbrnou medaili se ziskem 25 b. získal *Josef Tkadlec*. Bronzovými medailemi byli oceněni *Jan Matějka* (15 b.) a *Jan Vaňhara* (14 b.). Tři zbývající soutěžící skončili bez medaile (což byla v případě Samuela Říhy „fakt smůla“), nicméně obdrželi čestná uznání (*Honorary mention*) za bezchybné vyřešení jedné z úloh (u všech tří se shodně jednalo o první soutěžní úlohu). Medailemi bylo letos oceněno celkem 282 soutěžících, tedy celá část z poloviny počtu účastníků (podle regulí by počet medailistů neměl přesáhnout jednu polovinu účastníků), což byli letos právě řešitelé s alespoň 14 body. Mezi ně se potom v poměru 1 : 2 : 3 rozdělily zlaté (G), stříbrné (S) a bronzové (B) medaile. Na zlatou medali bylo letos potřeba minimálně 32 bodů, na stříbrnou medali minimálně 24 bodů. Maximálního možného počtu 42 bodů dosáhli dva studenti, Makoto Soejima z Japonska a Dongyi Wei z Číny. Za zmínku stojí, že nejmladší účastník soutěže, jedenáctiletý *Raúl Arturo Chávez Sarmiento* z Peru, získal bronzovou medaili a povedlo se mu tak vyrovnat počin Terence Taa z roku 1986, který tehdy získal bronzovou medaili rovněž již jako jedenáctiletý.

V neoficiálním pořadí zúčastněných zemí jsme se umístili na konci čtvrté desítky s celkovým ziskem 87 bodů, což je o dva body více než v loňském roce. Vzhledem k většímu počtu zúčastněných zemí, je to oproti loňskému roku, kdy jsme skončili na 39.-41. místě, relativní posun dopředu. Ve sledovaném souboji se slovenským družstvem jsme znovu zvítězili, slovenské družstvo získalo celkem 73 bodů, což stačilo na 53. místo a dvě bronzové medaile. Absolutní umístění českých a slovenských soutěžících lze vyčíst z následující tabulky

Pořadí	**Jméno**	**Body za úlohu číslo**							**Cena**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
117.–129.	Josef Tkadlec	7	7	1	7	3	0	25	S
249.–263.	Jan Matějka	6	6	1	0	2	0	15	B
264.–282.	Jan Vaňhara	6	0	1	0	7	0	14	B
296.–313.	David Klaška	7	1	0	0	4	0	12	HM
314.–334.	Samuel Říha	7	3	0	1	0	0	11	HM
335.–353.	Josef Ondřej	7	3	0	0	0	0	10	HM
	Celkem	40	20	3	8	16	0	87	
190.–197.	Michal Hagara	7	7	1	3	2	0	20	B
233.–248.	Martin Bachratý	7	1	1	7	0	0	16	B
314.–334.	Filip Sládek	7	2	1	1	0	0	11	HM
314.–334.	Jakub Uhrík	7	3	1	0	0	0	11	HM
376.–392.	Peter Csiba	7	1	0	0	0	0	8	HM
393.–415.	Eduard Eiben	3	2	0	0	2	0	7	
	Celkem	38	16	4	11	4	0	73	

Pro úplnost uvádíme tabulku pořadí zemí podle počtu dosažených bodů společně s počty medailí, které získali (čísla v závorce za názvem země značí počet reprezentantů, pokud byl nižší než šest):

	Země	Medaile			b.
		G	S	B	
1.	ČLR	6	0	0	221
2.	Japonsko	5	0	1	212
3.	Rusko	5	1	0	203
4.	Korea	3	3	0	188
5.	KLDR	3	2	1	183
6.	USA	2	4	0	182
7.	Thajsko	1	5	0	181
8.	Turecko	2	4	0	177
9.	Německo	1	4	1	171
10.	Bělorusko	1	4	1	167
11.	Itálie	2	2	2	165
11.	Tchaj-wan	1	5	0	165
13.	Rumunsko	2	2	2	163
14.	Ukrajina	3	1	2	162
15.	Írán	1	4	1	161
15.	Vietnam	2	2	2	161
17.	Brazílie	1	3	2	160
18.	Kanada	1	3	2	158
19.	Bulharsko	1	3	2	157
19.	Maďarsko	1	2	3	157
19.	Velká Británie	1	3	2	157
22.	Srbsko	1	3	1	153
23.	Austrálie	2	1	2	151
24.	Peru	0	4	2	144
25.	Gruzie	0	3	2	140
25.	*Polsko*	0	2	4	140
27.	Kazachstán	0	3	3	136
28.	Indie	0	3	2	130
29.	Hongkong	1	2	2	122
30.	Singapur	0	2	3	116
31.	Francie	0	1	3	112
32.	Chorvatsko	0	1	4	110
33.	Portugalsko	0	1	3	99
34.	Turkmenistán	0	1	3	97
35.	Argentina	0	1	1	93
36.	Ázerbájdžán	0	1	2	91
36.	Makedonie	0	1	3	91
38.	Belgie	0	1	2	89
39.	Kolumbie	0	1	2	88
40.	*Česká republika*	0	1	2	87
41.	Řecko	0	0	3	86
42.	Uzbekistán	0	1	2	85
43.	Indonézie	0	0	4	84
43.	JAR	0	0	2	84
45.	Tádžikistán	0	1	2	82
46.	Izrael	0	0	3	80
47.	Nizozemsko	0	1	1	79
47.	Švýcarsko	0	0	3	79
49.	Litva	0	1	1	77
50.	Mexiko	0	0	3	74
50.	Moldavsko	0	0	4	74
50.	Srí Lanka	0	0	2	74

	Země	Medaile			b.
		G	S	B	
53.	*Slovensko*	0	0	2	73
54.	Mongolsko	0	0	3	72
55.	Španělsko	0	0	4	71
56.	Švédsko	0	0	2	70
57.	Dánsko	0	1	1	68
58.	Bangladéš	0	0	2	67
59.	Rakousko	0	0	2	66
60.	Lucembursko	0	0	3	65
61.	Bosna a Hercegovina	0	0	1	63
62.	Lotyšsko	0	0	1	61
63.	Norsko	0	0	2	60
64.	Arménie	0	0	2	59
65.	Slovinsko	0	0	1	58
66.	Nový Zéland	0	0	1	53
67.	Finsko	0	0	0	49
67.	Macao	0	0	1	49
69.	Kypr	0	1	0	45
70.	Chile (4)	0	1	0	41
71.	Estonsko	0	0	0	40
72.	Kostarika (4)	0	0	1	34
73.	Kyrgyzstán	0	0	0	33
74.	Maroko	0	0	0	32
75.	Malajsie (2)	0	1	0	31
76.	Trinidad a Tobago	0	0	0	28
77.	Tunisko (5)	0	0	1	27
78.	Ekvádor	0	0	0	26
78.	Filipíny (4)	0	0	1	26
78.	Island	0	0	0	26
81.	Albánie	0	0	0	24
81.	Honduras (3)	0	0	1	24
83.	Černá hora (4)	0	0	0	23
83.	Portoriko	0	0	0	23
85.	Kuba (1)	0	0	1	21
85.	Lichtenštejnsko (2)	0	0	1	21
85.	Pákistán (5)	0	0	1	21
85.	Uruguay	0	0	0	21
89.	Irsko	0	0	0	20
90.	Nigérie	0	0	0	17
91.	Guatemala (4)	0	0	0	14
91.	Kambodža	0	0	0	14
91.	Paraguay (4)	0	0	0	14
94.	Salvádor (3)	0	0	0	13
94.	Venezuela (2)	0	0	0	13
96.	Panama (1)	0	0	0	12
97.	Bolívie (3)	0	0	0	9
98.	Mauretánie	0	0	0	8
99.	Sýrie (5)	0	0	0	7
100.	Zimbabwe (2)	0	0	0	5
101.	Benin (2)	0	0	0	3
101.	Kuvajt (4)	0	0	0	3
101.	SAE (5)	0	0	0	3
104.	Alžírsko (4)	0	0	0	2

Na závěr uvádíme texty soutěžních úloh (v závorkách jsou uvedeny názvy zemí, které úlohu do soutěže navrhly):

1. soutěžní den (15. 7. 2009)

1. Nechť n je kladné celé číslo a $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ jsou navzájem různá celá čísla z množiny $\{1, \ldots, n\}$ taková, že pro každé $i = 1, \ldots, k-1$ je číslo $a_i(a_{i+1} - 1)$ dělitelné n. Dokažte, že číslo $a_k(a_1 - 1)$ není dělitelné n.
(Austrálie)

2. Nechť O je střed kružnice opsané danému trojúhelníku ABC. Dále nechť P a Q jsou vnitřní body po řadě stran CA a AB. Označme K, L, M po řadě středy úseček BP, CQ, PQ a Γ kružnici, která prochází body K, L a M. Předpokládejme, že přímka PQ je tečnou ke kružnici Γ. Dokažte, že $|OP| = |OQ|$.
(Rusko)

3. Nechť $s_1, s_2, s_3, \ldots$ je rostoucí posloupnost kladných celých čísel taková, že obě její podposloupnosti

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{a} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

jsou aritmetické. Dokažte, že posloupnost $s_1, s_2, s_3, \ldots$ je také aritmetická.
(USA)

2. soutěžní den (16. 7. 2009)

4. Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AB| = |AC|$. Osy jeho vnitřních úhlů při vrcholech A a B protínají strany BC a CA po řadě v bodech D a E. Označme K střed kružnice vepsané trojúhelníku ADC. Předpokládejme, že $|\angle BEK| = 45°$. Najděte všechny možné velikosti úhlu CAB.
(Belgie)

5. Určete všechny takové funkce f z množiny kladných celých čísel do množiny kladných celých čísel, že pro všechna kladná celá čísla a, b existuje nedegenerovaný trojúhelník, jehož strany mají délky

$$a, \quad f(b), \quad f(b + f(a) - 1).$$

(Trojúhelník je *nedegenerovaný*, neleží-li všechny jeho vrcholy na téže přímce.)
(Francie)

6. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou navzájem různá kladná celá čísla a M je množina $n-1$ kladných celých čísel neobsahující číslo $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Luční kobylka skáče podél číselné osy, přičemž začíná v bodě 0 a provede ve směru doprava n skoků o délkách $a_1, a_2, \ldots, a_n$ v určitém pořadí. Dokažte, že pořadí skoků lze zvolit tak, že se kobylka neocitne na žádném čísle z množiny M.
(Rusko)