ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI 1. KOLA
59. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL (2009/2010)

KATEGORIE A

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - y} &= z - 1, \\
\sqrt{y^2 - z} &= x - 1, \\
\sqrt{z^2 - x} &= y - 1.
\end{aligned}
$$

(*Radek Horenský*)

2. Kosočtverci $ABCD$ je vepsána kružnice. Uvažujme její libovolnou tečnu protínající obě strany BC, CD a označme po řadě R, S její průsečíky s přímkami AB, AD. Dokažte, že hodnota součinu $|BR| \cdot |DS|$ na volbě tečny nezávisí. (*Leo Boček*)

3. Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, ... , 33. V jednom kroku zvolíme na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je dělitelem druhého, obě smažeme a na tabuli napíšeme jejich (celočíselný) podíl. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen čísla, z nichž žádné není dělitelem jiného. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je číslem 1.) Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat? (*Peter Novotný*)

4. V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O, V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S, právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost $60°$. (*Tomáš Jurík*)

5. V kádi je r_0 ryb, společný úlovek n rybářů. Přicházejí pro svůj díl jednotlivě, každý si myslí, že se dostavil jako první, a aby si vzal přesně n-tinu aktuálního počtu ryb v kádi, musí předtím jednu z ryb pustit zpět do moře. Určete nejmenší možné číslo r_0 v závislosti na daném $n \geq 2$, když i poslední rybář si aspoň jednu rybu odnese. (*Dag Hrubý*)

6. Pro dané prvočíslo p určete počet (všech) uspořádaných trojic (a, b, c) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2p^2\}$, které splňují vztah

$$
\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot c,
$$

kde $[x, y]$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y. (*Tomáš Jurík*)

KATEGORIE B

1. Na stole leží tři hromádky zápalek: v jedné 2 009, ve druhé 2 010 a v poslední 2 011. Hráč, který je na tahu, zvolí dvě hromádky a z každé z nich odebere po jedné zápalce. Ve hře se pravidelně střídají dva hráči. Hra končí, jakmile některá hromádka zmizí. Vyhrává ten hráč, který udělal poslední tah. Popište strategii jednoho z hráčů, která mu zajistí výhru. (*Ján Mazák*)

2. Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo, které má přesně šest kladných dělitelů, z nichž právě dva jsou jednomístní a právě dva dvojmístní. Větší z dvojmístných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla. Určete všechna čísla, která mohou být na tabuli napsána. (*Peter Novotný*)

3. V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, pro jehož středy stran AB, CD, DA označené po řadě K, L, M platí: body A, B, L, D leží na jedné kružnici a rovněž body K, L, D, M leží na jedné kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

4. Najděte 2 009 po sobě jdoucích čtyřmístných čísel, jejichž součet je součinem tří po sobě jdoucích přirozených čísel. (*Radek Horenský*)

5. Uvnitř kratšího oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je zvolen bod D. Tětiva CD protíná stranu AB v bodě E. Dokažte, že trojúhelník se stranami délek $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný trojúhelníku ABD. (*Pavel Leischner*)

6. Reálná čísla a, b mají tuto vlastnost: rovnice $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokažte nerovnost $b > 3$.

b) Pomocí b vyjádřete kořeny obou rovnic. (*Jaromír Šimša*)

KATEGORIE C

1. Erika a Klárka hrály hru „slovní logik“ s těmito pravidly: Hráč A si myslí slovo složené z pěti různých písmen. Hráč B vysloví libovolné slovo složené z pěti různých písmen a hráč A mu prozradí, kolik písmen uhodl na správné pozici a kolik na nesprávné. Písmena považujeme za různá, i když se liší jen háčkem nebo čárkou (například písmena A, Á jsou různá). Kdyby si hráč A myslel například slovo LOĎKA a B by vyslovil slovo KOLÁČ, odpoví hráč A, že jedno písmeno uhodl hráč B na správné pozici a dvě na nesprávné. Zkráceně sdělí „$1 + 2$“, neboť se opravdu obě slova shodují pouze v písmenu O včetně pozice (druhé zleva) a v písmenech K a L, jejichž pozice jsou odlišné. Erika si myslela slovo z pěti různých písmen a Klárka vyslovila slova KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA a ZÁPAL. Erika na tato slova v daném pořadí odpověděla $0 + 3$, $0 + 2$, $1 + 2$, $2 + 0$ a $1 + 2$. Zjistěte, jaké slovo si Erika mohla myslet. (*Peter Novotný*)

2. Vrcholem C pravoúhelníku $ABCD$ veďte přímky p a q, které mají s daným pravoúhelníkem společný pouze bod C, přičemž přímka p má od bodu A největší možnou vzdálenost a přímka q vymezuje s přímkami AB, AD trojúhelník co nejmenšího obsahu. (*Leo Boček*)

3. Určete všechna reálná čísla x, která vyhovují rovnici $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$. (Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než číslo x, tzv. dolní celou část reálného čísla x.) (*Jaroslav Švrček*)

4. Kružnice $k(S; r)$ se dotýká přímky AB v bodě A. Kružnice $l(T; s)$ se dotýká přímky AB v bodě B a protíná kružnici k v krajních bodech C, D jejího průměru. Vyjádřete délku a úsečky AB pomocí poloměrů r, s. Dokažte dále, že průsečík M přímek CD, AB je středem úsečky AB. (*Leo Boček*)

5. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \le \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} \le \frac{a + b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost. (*Ján Mazák*)

6. Najděte všechna přirozená čísla, která nejsou dělitelná deseti a která ve svém dekadickém zápisu mají někde vedle sebe dvě nuly, po jejichž vyškrtnutí se původní číslo 89krát zmenší. (*Jaromír Šimša*)