59. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Zvětšíme-li čitatel i jmenovatel jistého zlomku o 1, dostaneme zlomek o hodnotu $1/20$ větší. Provedeme-li s větším zlomkem stejnou operaci, dostaneme zlomek o hodnotu $1/12$ větší, než byla hodnota zlomku na počátku. Určete všechny tři zlomky.

2. Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ mají vnitřní dotyk v bodě B. Určete délky stran trojúhelníku ABC, kde bod A je průsečík přímky OB s kružnicí k a bod C je průsečík kružnice k s tečnou z bodu A ke kružnici l.

3. Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a, b, pro něž platí $a^2 + b + 2 = a + b^2$.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

ve čtvrtek 21. ledna 2010

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Označme a/b původní zlomek. Podle zadání platí rovnosti

$$\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{a+2}{b+2}-\frac{a}{b}=\frac{1}{12} \quad (a,b\in\mathbb{N})$$

ekvivalentní se vztahy

$$20b(a+1)-20a(b+1)=b(b+1) \quad \text{a} \quad 12b(a+2)-12a(b+2)=b(b+2),$$

které upravíme na tvar $19b-20a=b^2$ a $22b-24a=b^2$. Po odečtení obou vztahů zjistíme, že $4a=3b$, což po dosazení do druhé rovnosti dá $22b-18b=b^2$ neboli $b^2=4b$. Vzhledem k podmínce $b\neq 0$ odtud plyne $b=4$ a $a=3$.

Hledané zlomky jsou tedy 3/4, 4/5 a 5/6.

Jiné řešení. Označme a/b původní zlomek. Ze vztahů

$$\frac{1}{20}=\frac{1}{4\cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{1}{12}=\frac{1}{4\cdot 3}=\frac{2}{4\cdot 6}$$

lze odhadnout, že řešením by mohlo být $b=4$. Pak

$$\frac{4(a+1)-5a}{4\cdot 5}=\frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{4(a+2)-6a}{4\cdot 6}=\frac{1}{12},$$

neboli $a=3$. Musíme se však ještě přesvědčit, že úloha jiné řešení nemá. Podmínky úlohy vedou ke vztahům

$$\frac{b-a}{b(b+1)}=\frac{1}{4\cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{2(b-a)}{b(b+2)}=\frac{2}{4\cdot 6}.$$

Z podílu jejich levých a pravých stran pak plyne

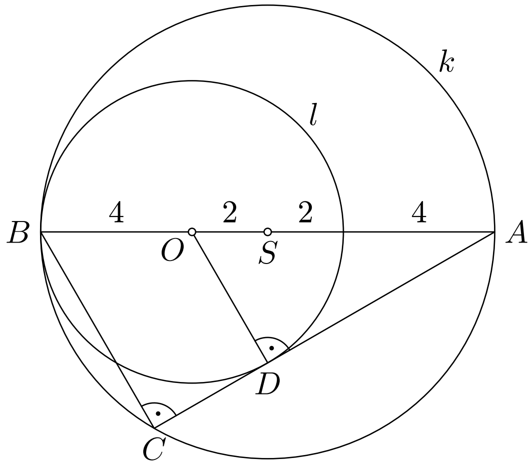
$$\frac{b+2}{b+1}=\frac{6}{5},$$

čemuž vyhovuje jedině $b=4$.

Poznámka. V úplném řešení nesmí chybět vyloučení možnosti $b\neq 4$. Například z podobných rovností $1/20=30/24\cdot 25$ a $1/12=52/24\cdot 26$ bychom mohli hádat, že $b=24$, což řešením není.

Za úplné a správně zdůvodněné řešení udělte 6 bodů, z toho nejvýše 3 body za sestavení a vhodnou úpravu rovnic (typicky na dvě rovnice o dvou neznámých s odstraněnými zlomky). Pokud řešitel objeví jako řešení zlomek 3/4, avšak nezdůvodní, proč jiné řešení neexistuje, udělte jen 1 bod, případně body 2, pokud se řešitel o nějaké algebraické zdůvodnění pokusí.

2. Bod dotyku kružnice l s tečnou z bodu A označme D (obr. 1). Z vlastností tečny ke kružnici plyne, že úhel ADO je pravý. Zároveň je pravý i úhel ACB (Thaletova věta).



Obr. 1

Trojúhelníky ABC a AOD jsou tak podobné podle věty uu, neboť se shodují v úhlech ACB, ADO a ve společném úhlu při vrcholu A. Z uvedené podobnosti plyne

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \tag{1}$$

Ze zadaných číselných hodnot vychází $|OD| = |OB| = 4\,\mathrm{cm}$, $|OS| = |SB| - |OB| = 2\,\mathrm{cm}$, $|OA| = |OS| + |SA| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|AB| = 12\,\mathrm{cm}$. Podle (1) je tedy $|BC| : 4\,\mathrm{cm} = 12 : 8$ a odtud $|BC| = 6\,\mathrm{cm}$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC nakonec zjistíme, že $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2}\,\mathrm{cm} = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

Za úplné a správně zdůvodněné řešení udělte 6 bodů. Z toho 2 body za obrázek a zdůvodnění pravých úhlů, 2 body za zdůvodnění podobnosti trojúhelníků a sestavení potřebné rovnice, 2 body za dopočítání délek stran BC a AC.

3. Rovnici přepíšeme do tvaru $2 = (b^2 - a^2) - (b - a)$, z nějž po využití vztahu pro rozdíl čtverců a následném vytknutí výrazu $b - a$ dostaneme $2 = (b - a)(a + b - 1)$. Protože 2 je prvočíslo, máme pro uvedený součin následující čtyři možnosti:

a) $b - a = 1$ a $a + b - 1 = 2$, pak $a = 1$ a $b = 2$.

b) $b - a = 2$ a $a + b - 1 = 1$, pak $a = 0$ a $b = 2$.

c) $b - a = -1$ a $a + b - 1 = -2$. Druhou rovnici lze přepsat na tvar $a + b = -1$, z nějž vidíme, že rovnost nenastane pro žádnou dvojici nezáporných celých čísel.

d) $b - a = -2$ a $a + b - 1 = -1$. Druhou rovnici lze přepsat na tvar $a + b = 0$, z nějž vidíme, že jí vyhovuje jediná dvojice nezáporných celých čísel $a = b = 0$, která však nevyhovuje první rovnici.

Závěr: Úloha má dvě řešení: Buď je $a = 1$ a $b = 2$, nebo $a = 0$ a $b = 2$.

Poznámka. Místo rozboru čtyř možností můžeme začít úvahou, že nulová čísla a, b nejsou řešením úlohy, takže $a + b - 1 \geqq 0$, a tedy i $b - a \geqq 0$. Stačí tudíž uvažovat jen možnosti a) a b).

Jiné řešení. Rovnici upravíme na tvar $2 = (b^2 - b) - (a^2 - a)$, resp. na tvar $2 = b(b-1) - a(a-1)$. Z následující tabulky i tvaru čísel $x^2 - x = x(x-1)$ je zřejmé, že rozdíly mezi sousedními hodnotami výrazů $x(x-1)$ rostou s rostoucím x (snadno se o tom přesvědčíme výpočtem: $(x+1)x - x(x-1) = 2x$).

x	0	1	2	3	4	5	...
$x(x-1)$	0	0	2	6	12	20	...

Může tedy být jedině $b^2 - b = 2$ a $a^2 - a = 0$. Odtud $a \in \{0, 1\}$ a $b = 2$. Řešením úlohy jsou tedy dvě dvojice nezáporných celých čísel: $a = 0$, $b = 2$ a $a = 1$, $b = 2$.

Za úplné a správně zdůvodněné řešení udělte 6 bodů, z toho jeden bod za vhodnou úpravu rovnice. V případě prvního řešení strhněte po jednom bodu při vynechání některé ze situací a), b) a 1 bod, pokud řešitel nevyloučí možnosti c), d).