59. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Dokažte, že rovnice $x^2 + p|x| = qx - 1$ s reálnými parametry p, q má v oboru reálných čísel čtyři řešení, právě když platí $p + |q| + 2 < 0$.

2. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné.

3. Určete všechna celá kladná čísla m, n taková, že n dělí $2m - 1$ a m dělí $2n - 1$.

4. V libovolném trojúhelníku ABC označme O střed kružnice vepsané, P střed kružnice připsané ke straně BC a D průsečík osy úhlu CAB se stranou BC. Dokažte, že platí

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}.$$

(Kružnicí připsanou ke straně BC rozumíme takovou kružnici, která se dotýká jednak strany BC, jednak obou polopřímek opačných k polopřímkám BA a CA.)

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 19. ledna 2010

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

59. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie A

1. Ze zadání je patrné, že číslo 0 není řešením dané rovnice, ať jsou parametry p, q jakékoliv. Zbavme se proto absolutní hodnoty v rovnici konstatováním, že všechna její řešení jsou *kladné* kořeny rovnice

$$x^2 + px = qx - 1 \quad \text{neboli} \quad x^2 + (p-q)x + 1 = 0, \tag{1}$$

spolu se *zápornými* kořeny rovnice

$$x^2 - px = qx - 1 \quad \text{neboli} \quad x^2 - (p+q)x + 1 = 0. \tag{2}$$

Protože každá kvadratická rovnice má nejvýše dva kořeny, zkoumaná situace celkového počtu čtyř řešení nastane, právě když rovnice (1) bude mít dva *různé kladné* kořeny a zároveň rovnice (2) bude mít dva *různé záporné* kořeny. Rozborem těchto podmínek se nyní budeme zabývat.

Předně je jasné, že oba diskriminanty $(p-q)^2 - 4$ a $(p+q)^2 - 4$ rovnic (1) a (2) musí mít kladné hodnoty, což vede na nutné podmínky

$$(p-q)^2 > 4 \quad \text{a} \quad (p+q)^2 > 4. \tag{3}$$

Jsou-li splněny, stačí zkoumat otázku, kdy *menší* kořen rovnice (1) je *kladný* a zároveň *větší* kořen rovnice (2) *záporný*. Podle vzorců pro kořeny kvadratické rovnice to lze zapsat nerovnostmi

$$\frac{q-p-\sqrt{(p-q)^2-4}}{2} > 0 \quad \text{a} \quad \frac{p+q+\sqrt{(p+q)^2-4}}{2} < 0. \tag{4}$$

(Znaménka pro menší, resp. větší kořen jsme vybrali na základě toho, že jmenovatelé obou zlomků se rovnají *kladnému* číslu 2.) Z první nerovnosti zapsané v ekvivalentním tvaru

$$q - p > \sqrt{(p-q)^2 - 4} \tag{5}$$

plyne $q-p > 0$, takže první nerovnost v (3) lze zpřesnit na $q-p > 2$. Pak už nerovnost (5) zřejmě platí, neboť

$$q - p = \sqrt{(p-q)^2} > \sqrt{(p-q)^2 - 4}.$$

Tak jsme ukázali, že rovnice (1) má dva různé kladné kořeny, právě když platí $q - p > 2$, což je první z podmínek

$$p - q + 2 < 0, \quad p + q + 2 < 0. \tag{6}$$

Stejným postupem ověříme, že druhá podmínka v (6) vyjadřuje existenci dvou různých záporných kořenů rovnice (2). Stačí upravit druhou nerovnost z (4) do tvaru

$$\sqrt{(p+q)^2 - 4} < -(p+q) \qquad (\text{odkud plyne } p + q < 0)$$

a pro záporné číslo $p+q$ tak získat konečnou podmínku ve tvaru $p+q<-2$, což je druhá z nerovností (6), které tak přesně vymezují zkoumanou situaci.

K dokončení celého řešení zbývá zdůvodnit ekvivalenci

$$(p-q+2<0 \ \wedge \ p+q+2<0) \ \Leftrightarrow \ p+|q|+2<0.$$

To je snadné, protože ze zřejmé rovnosti $|q|=\max\{-q,q\}$ plyne

$$p+|q|+2=\max\{p-q+2,p+q+2\}$$

a maximum ze dvou reálných čísel je záporné, právě když jsou obě záporná.

Jiné řešení. Nejprve postupujme shodně s původním řešením až do odvození nerovností (3), které, připomeňme, zaručují existenci dvou různých reálných kořenů rovnice (1), resp. rovnice (2). Označíme je po řadě $x_{1,2}$ a $x_{3,4}$ a zapíšeme jejich vztah ke koeficientům rovnic, vyjádřený známými Viètovými vzorci

$$x_1+x_2=-(p-q),\ x_1x_2=1,\ x_3+x_4=p+q,\ x_3x_4=1. \tag{7}$$

Z rovnosti $x_1x_2=1$ plyne, že kořeny $x_{1,2}$ mají stejné znaménko. Jsou tedy kladné, právě když je kladný jejich součet, který je ovšem podle první rovnosti v (7) roven $-(p-q)$. Získanou nerovnost $p-q<0$ lze spolu s podmínkou $(p-q)^2>4$ vyjádřit jedinou nerovností $p-q<-2$ (neboli $p-q+2<0$), která je tudíž kritériem toho, kdy rovnice (1) má dva různé kladné kořeny. Podobně pro existenci dvou záporných kořenů rovnice (2) dostaneme kritérium $p+q+2<0$. Závěrečný převod obou nerovností na jednu ekvivalentní nerovnost s absolutní hodnotou zdůvodníme stejně jako v původním řešení.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozích postupech přejdeme k rovnicím (1) a (2), které jsou obě téhož typu $x^2+rx+1=0$. Existenci dvou různých kladných či záporných kořenů takové rovnice nyní posoudíme úvahou o příslušné kvadratické funkci $f(x)=x^2+rx+1$ s parametrem r, jejímž grafem je parabola rozevřená vzhůru. Proto má funkce f dva různé nulové body, řekněme u a v, právě když má alespoň jednu zápornou hodnotu, navíc takové hodnoty se nabývají právě v bodech, které leží mezi u a v. Všimněme si ještě, že bez ohledu na hodnotu parametru r pro případné nulové body u, v funkce f platí $uv=f(0)=1$, takže to jsou dvě navzájem převrácená čísla, jež jsou zároveň kladná či zároveň záporná. Jsou tedy obě kladná (resp. záporná), právě když mezi nimi leží číslo 1 (resp. číslo -1). Pro první případ tak dostáváme jedinou podmínku $f(1)<0$ (neboli $2+r<0$), pro druhý případ jedinou podmínku $f(-1)<0$ (neboli $2-r<0$). Zbývá dodat, že v rovnici (1) je $r=p-q$ a v rovnici (2) je $r=-(p+q)$, takže znovu dostáváme dvojici nerovností (6).

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 1 bod za přechod od podmínek (6) k podmínce s absolutní hodnotou (či naopak). Při neúplných řešeních udělte 2 body za odvození podmínek (3) na diskriminanty rovnic (1), (2) a 1 bod za výpis nerovností (4) či Viètových vzorců (7). Je-li úplně posouzena pouze nutnost či postačitelnost zadané podmínky z důvodu, že zřejmé ekvivalence jsou řešitelem formulovány pouze jako implikace, udělte nejvýše 5 bodů.

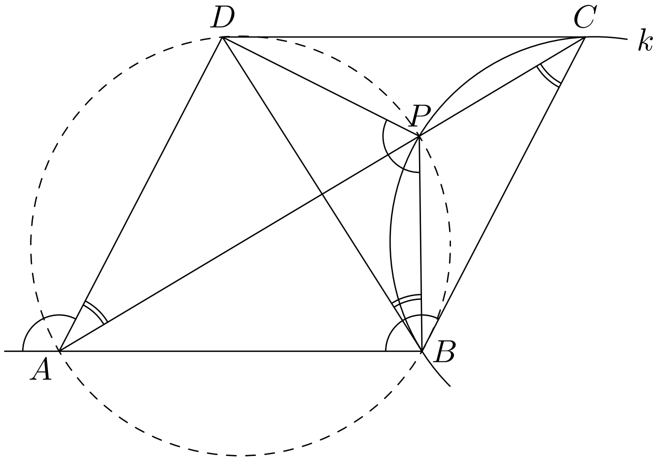
2. Pro lepší přehlednost zmiňme úvodem zřejmé vlastnosti obecného rovnoběžníku $ABCD$, které v řešení využijeme: součet úhlů BAD a ABC je úhel přímý, zatímco úhly DAC a ACB jsou shodné, stejně jako strany AB a CD.

Podle zadání úlohy přímka BD odděluje body A a P, přičemž platí

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 180°,$$

čtyřúhelníku $ABPD$ lze tudíž opsat kružnici (obr. 1). V ní jsou proto shodné obvodové úhly DBP a DAP, z čehož vyplývá

$$|\sphericalangle DBP| = |\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle BCP|.$$



Obr. 1

Protože přímka BP odděluje body C a D, lze uplatnit větu o obvodovém a úsekovém úhlu pro tětivu BP kružnice k opsané trojúhelníku BCP: Z odvozené shodnosti úhlů BCP a DBP vyplývá, že přímka BD je tečnou ke kružnici k (s bodem dotyku B). Po tomto zjištění již snadno dokážeme obě požadované implikace.

(i) Je-li přímka CD tečnou ke kružnici k, ze symetrie obou tečen CD a BD plyne $|CD| = |BD|$ neboli $|AB| = |BD|$.

(ii) Platí-li naopak $|AB| = |BD|$ neboli $|CD| = |BD|$, leží bod D na ose tětivy BC kružnice k, takže její tečnou je nejen přímka BD, ale i souměrně sdružená přímka CD.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za objev tětivového čtyřúhelníku $ABPD$, 2 body za zdůvodnění, že přímka CD je tečnou kružnice k a po 1 bodu za jednotlivé implikace (i) a (ii). Patřičné polohy bodů pro závěry o obvodových, příp. úsekových úhlech jsou ze zadání úlohy natolik zřejmé, že absenci jejich popisu v žákovských řešeních nepenalizujte.

3. Hledáme právě ty dvojice celých kladných čísel m a n, pro něž existují celá kladná čísla k a l taková, že

$$2m - 1 = kn \quad \text{a} \quad 2n - 1 = lm. \tag{1}$$

Pohlédněme na čísla k, l jako na parametry a řešme soustavu lineárních rovnic (1) pro neznámé m, n. Když například k dvojnásobku první rovnice přičteme k-násobek druhé rovnice, eliminujeme tím neznámou n a po úpravě dostaneme první z rovnic

$$(4-kl)m = k+2 \quad \text{a} \quad (4-kl)n = l+2; \tag{2}$$

druhou rovnici získáme analogicky. Protože pravé strany rovnic (2) jsou kladné, plyne z tvaru levých stran podmínka $4-kl>0$ neboli $kl<4$. To je pro celá kladná čísla k, l natolik omezující, že jednotlivé možné případy $kl=1$, $kl=2$ a $kl=3$ snadno postupně rozebereme.

V případě $kl=1$ musí být $k=l=1$ a z rovnic (2), které přejdou do tvaru $3m=3$ a $3n=3$, nacházíme první vyhovující dvojici $m=n=1$.

Případ $kl=2$ vůbec rozebírat nemusíme, protože podle levých stran rovnic (1) vidíme, že čísla k, l, m, n z pravých stran musí být (v každém, nejen v tomto případě) lichá.

V případě $kl=3$ je nutně $\{k,l\}=\{1,3\}$, což po dosazení do rovnic (2) dává řešení $m=5$ a $n=3$, nebo naopak $m=3$ a $n=5$.

Závěr. Všechny hledané dvojice (m,n) jsou $(1,1)$, $(3,5)$ a $(5,3)$.

Jiná řešení. Nerovnostní úvahy vedoucí k úplnému vyřešení úlohy můžeme různými způsoby obměňovat. Podívejme se tedy, jakými cestami se lze od výchozích předpokladů $m \mid 2n-1$ a $n \mid 2m-1$ ubírat.

První postup. Kdyby neplatilo $m=2n-1$ ani $n=2m-1$, byla by čísla $2n-1$ a $2m-1$ alespoň dvojnásobky po řadě čísel m a n, tudíž by platily nerovnosti $2n-1 \geqq 2m$ a $2m-1 \geqq 2n$. Ty se však navzájem vylučují, neboť znamenají $2n>2m$, resp. $2m>2n$. Proto musí platit aspoň jedna z rovností $m=2n-1$ či $n=2m-1$. Je-li $m=2n-1$, pak $2m-1=4n-3$ a zbylá podmínka $n \mid 2m-1$ tak přechází do tvaru $n \mid 4n-3$ neboli $n \mid 3$. To splňují pouze čísla $n=1$ a $n=3$, kterým podle vzorce $m=2n-1$ odpovídají po řadě hodnoty $m=1$ a $m=5$. Druhý případ, kdy $n=2m-1$, se od prvního liší jen záměnou rolí m a n, takže při něm dostaneme ještě třetí vyhovující dvojici $m=3$ a $n=5$.

Druhý postup. S ohledem na symetrii můžeme předpokládat, že platí $m \leqq n$, z čehož plyne $2m-1 \leqq 2n-1 < 2n$. Číslo $2m-1$ je tak násobkem čísla n menším než $2n$, musí to tudíž být samo číslo n. Tak jsme odvodili rovnost $2m-1=n$. Zbytek úvah je už stejný jako při prvním postupu.

Třetí postup. Všimněme si, že číslo $2m+2n-1$ je dělitelné každým z obou čísel m a n, která jsou navíc nesoudělná, neboť např. číslo m je dělitel čísla $2n-1$, jež je s číslem n zřejmě nesoudělné. Proto je číslo $2m+2n-1$ dělitelné i součinem mn, takže platí nerovnost $mn \leqq 2m+2n-1$ neboli $(m-2)(n-2) \leqq 3$. Odtud vyplývá, že obě čísla m, n nemohou být větší než 3; s ohledem na symetrii rozebereme pouze případ $m \leqq 3$. Pro $m=1$ z podmínky $n \mid 2m-1$ plyne $n=1$, pro $m=2$ je podmínka $m \mid 2n-1$ nesplnitelná, pro $m=3$ máme podmínky $3 \mid 2n-1$ a $n \mid 5$, které splňuje jedině $n=5$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za různé nerovnostní úvahy udělte 1 až 4 body, např. 1 bod za rozlišení případů $m \leqq n$ a $n \leqq m$, 2 body za účinné užití implikace $(a \neq b \wedge a \mid b) \Rightarrow b \geqq 2a$, 4 body za důkaz poznatku, že nastane aspoň jedna z rovností $m=2n-1$, $n=2m-1$. Pokud řešitel objeví všechny tři vyhovující trojice, avšak nedokáže, že jiná řešení neexistují, udělte 1 bod.

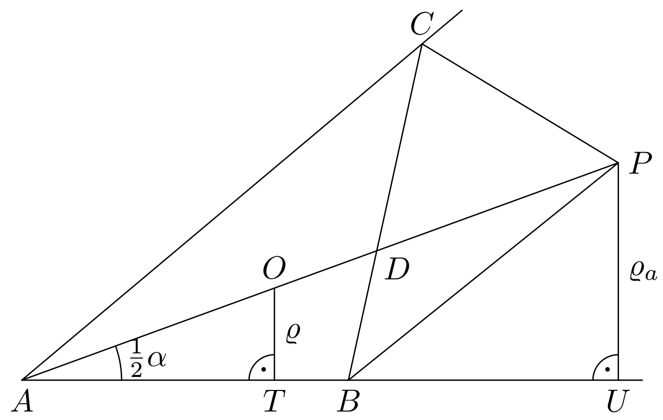
4. Označme obvyklým způsobem délky stran a velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Pro poloměry ϱ, ϱ_a kružnice vepsané, resp. připsané straně BC trojúhelníku ABC o obsahu S platí známé vzorce

$$\varrho = \frac{2S}{a+b+c} \quad \text{a} \quad \varrho_a = \frac{2S}{b+c-a}.$$

(K jejich odvození stačí uvážit rovnosti $S = S_{BCO} + S_{ABO} + S_{ACO}$, resp. $S = S_{ACP} + S_{ABP} - S_{BCP}$ a uvážit, že ϱ, resp. ϱ_a je společná výška zastoupené trojice trojúhelníků ke stranám původního trojúhelníku.)

Protože středy O, P leží na ose vnitřního úhlu BAC, jsou ϱ, ϱ_a odvěsnami protilehlými k úhlu $\frac{1}{2}\alpha$ pravoúhlých trojúhelníků s přeponami AO, resp. AP (obr. 2), takže platí $\varrho = |AO| \sin\frac{1}{2}\alpha$ a $\varrho_a = |AP| \sin\frac{1}{2}\alpha$. Dohromady dostáváme vyjádření pravé strany dokazované rovnosti ve tvaru

$$\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\varrho} + \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\varrho_a} = \frac{\big((a+b+c)+(b+c-a)\big)\sin\frac{1}{2}\alpha}{2S} = \frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{S}.$$



Obr. 2

Na druhé straně je obsah S součtem obsahů trojúhelníků ABD a ACD, které vyjádříme pomocí délek jejich stran z vrcholu A a sinu jimi sevřeného (shodného) úhlu $\frac{1}{2}\alpha$:

$$S = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{c|AD|\sin\frac{1}{2}\alpha}{2} + \frac{b|AD|\sin\frac{1}{2}\alpha}{2} = \frac{(b+c)|AD|\sin\frac{1}{2}\alpha}{2}.$$

Odtud snadno obdržíme vyjádření

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{S}.$$

Vidíme, že obě strany dokazované rovnosti mají stejnou hodnotu. Tím je celý důkaz hotov. Dodejme, že díky vzorci $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = bc\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$ lze získaný výsledek zapsat ve tvaru

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{b+c}{bc\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

Jiné řešení. Využijeme rovnosti $|AT| = \frac{1}{2}(b+c-a)$ a $|AU| = \frac{1}{2}(a+b+c)$ pro body T, U dotyku polopřímky AB s vepsanou, resp. připsanou kružnicí.[1] Vzhledem k rovnostem $|AT| = |AO|\cos\frac{1}{2}\alpha$ a $|AU| = |AP|\cos\frac{1}{2}\alpha$ dostaneme následující vyjádření pravé strany dokazované rovnosti:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} &= \frac{|AO|+|AP|}{|AP|}\cdot\frac{1}{|AO|} = \frac{|AT|+|AU|}{|AU|}\cdot\frac{1}{|AO|} = \\ &= \frac{b+c}{\frac{1}{2}(a+b+c)}\cdot\frac{1}{|AO|} = \frac{2(b+c)}{a+b+c}\cdot\frac{1}{|AO|}.\end{aligned}$$

Vidíme, že k dokončení důkazu požadované rovnosti stačí ukázat, že

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Z vlastností osy úhlu však víme, že bod D dělí stranu BC v poměru délek stran AB a AC, tedy $|BD|/|DC| = c/b$, takže $|CD| = ab/(b+c)$. Podobně ovšem bod O osy úhlu ACD dělí protější stranu AD trojúhelníku ACD v poměru

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{b}{\dfrac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Odtud

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{|AO|+|OD|}{|AO|} = 1 + \frac{a}{b+c} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Jiné řešení. Uvedeme trigonometrický postup založený na užití sinové věty v trojúhelnících ABO, ABD a ABP.[2] Je zřejmé, že tyto trojúhelníky mají u vrcholu B po řadě úhly $\frac{1}{2}\beta$, β a $90^\circ + \frac{1}{2}\beta$, zatímco u vrcholů O, D, P mají po řadě úhly $90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$, $\gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\frac{1}{2}\gamma$. Proto sinová věta přináší rovnosti

$$\frac{|AB|}{|AO|} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\beta}, \quad \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{\sin(\gamma+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta}, \quad \frac{|AB|}{|AP|} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta},$$

---

[1] Tyto rovnosti jsou dobře známé a snadno plynou z rovností délek úseků tečen od vrcholů trojúhelníku k bodům dotyku s příslušnou kružnicí.

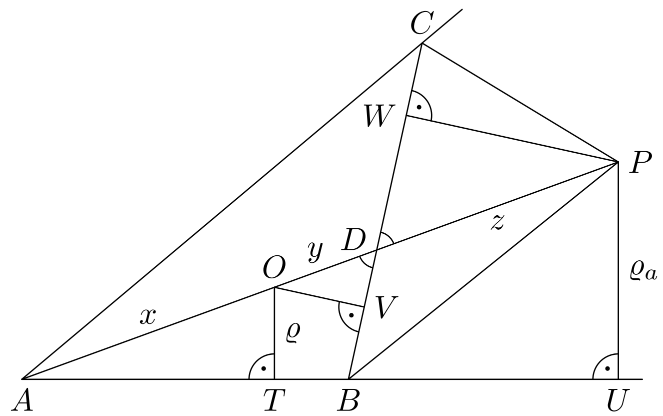
[2] Se stejným úspěchem lze využít i trojici trojúhelníků ACO, ACD a ACP.

když jsme dvakrát využili vzorec $\sin(90^\circ + \delta) = \cos\delta$. Po dosazení do dokazované rovnosti tak docházíme k ekvivalentní úloze dokázat pro vnitřní úhly libovolného trojúhelníku ABC rovnost
$$\frac{2\sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\beta} + \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta}.$$

Po uplatnění vzorce $\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ a následném vynásobení obou stran nenulovým výrazem $\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ přecházíme k úkolu ověřit jednodušší rovnost
$$\sin\Big(\gamma + \frac{1}{2}\alpha\Big) = \cos\frac{1}{2}\gamma \cdot \cos\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma \cdot \sin\frac{1}{2}\beta.$$

To je už docela snadné: výraz napravo je totiž roven $\cos(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma)$ a rovnost typu $\sin\delta = \cos\varepsilon$ je zaručena, platí-li $\delta + \varepsilon = 90^\circ$. V našem případě je ovšem $\delta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$, tudíž
$$\delta + \varepsilon = \gamma + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90^\circ$$
a celý důkaz je tak hotov.

Jiné řešení. Položme $x = |AO|$, $y = |OD|$ a $z = |DP|$ a podle obr. 3 označme body dotyku T, U, V, W vepsané a připsané kružnice s přímkami AB, BC. Podle věty *uu* platí



Obr. 3

$\triangle AOT \sim \triangle APU$ a $\triangle DOV \sim \triangle DPW$, přitom v obou případech je koeficient podobnosti roven poměru poloměrů obou kružnic. Odtud plyne pro přepony zmíněných čtyř trojúhelníků úměra[3]
$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{y}{z}. \tag{1}$$

Protože $x + y + z > z$, a tedy rovněž $x > y$, uvedeným dvěma zlomkům se rovná i třetí zlomek sestavený z (kladných) rozdílů čitatelů a jmenovatelů. Platí tedy
$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{x-y}{(x+y+z)-z} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{2x}{x+y} - 1.$$

[3] Její platnost je zaručena i v případě $D = V = W$, kdy druhý pár podobných trojúhelníků degeneruje na dvojici úseček – poloměrů zkoumaných kružnic.

Odtud po vydělení kladnou hodnotou x dostaneme

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{2}{x+y} - \frac{1}{x}$$

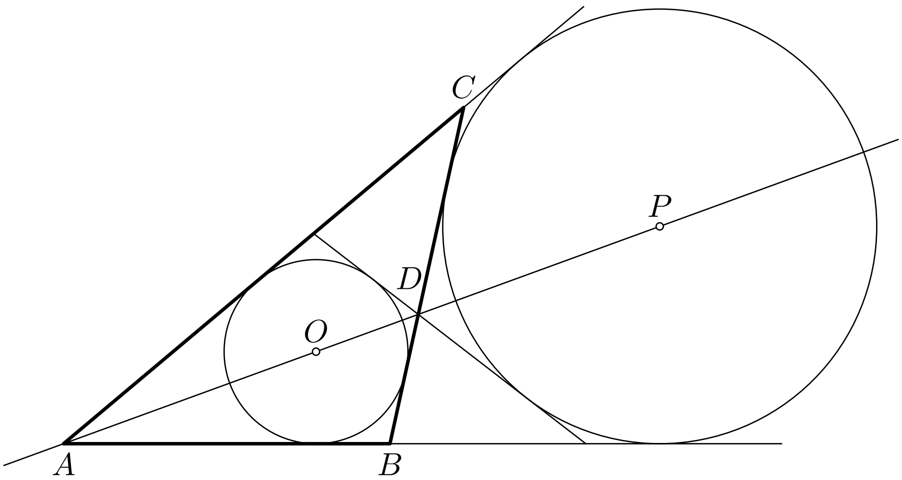
a po převodu druhého zlomku z pravé strany na levou již obdržíme dokazovanou rovnost, neboť

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{|AP|}, \quad \frac{2}{x+y} = \frac{2}{|AD|} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{|AO|}.$$

Jiné řešení. Obě kružnice jsou stejnolehlé podle středů A i D. Obě stejnolehlosti mají až na znaménko stejné koeficienty a zobrazují bod O na bod P (obr. 4). Odtud

$$\frac{|DP|}{|DO|} = \frac{|AP|}{|AO|} \quad \text{neboli} \quad \frac{|AP| - |AD|}{|AD| - |AO|} = \frac{|AP|}{|AO|}.$$

Úpravou poslední rovnosti dostáváme $2|AP||AO| = |AD|(|AP| + |AO|)$ a po vydělení nenulovým součinem $|AP||AO||AD|$ vyjde vztah, který jsme chtěli dokázat.



Obr. 4

Za úplné řešení je 6 bodů. Známé vzorce pro délky úseků stran k bodům dotyku vepsané a připsané kružnice stejně jako vzorce pro jejich poloměry není třeba dokazovat. Za vyjádření jednotlivých délek $|AD|$, $|AO|$, $|AP|$ pomocí obsahu S, délek b, c a hodnoty $\sin \frac{1}{2}\alpha$ udělte po 1 bodu; stejně tak při jiném postupu udělte po 1 bodu za jednotlivá vyjádření ze sinové věty pomocí vnitřních úhlů α, β, γ a jedné ze stran b, c. (Takové zisky ovšem nelze sčítat, zkouší-li řešitel současně oba postupy.)