59. ročník matematické olympiády
III. kolo kategorie A

Cheb, 21.–24. března 2010

1. *Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro něž platí*

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

(Martin Panák)

Řešení. Z rovnice plyne, že b^2 je sudé číslo větší než 4^a, tudíž b je sudé číslo větší než sudé číslo 2^a. Musí proto platit $b \geqq 2^a + 2$, odkud

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2 \geqq (2^a + 2)^2 = 4^a + 4 \cdot 2^a + 4.$$

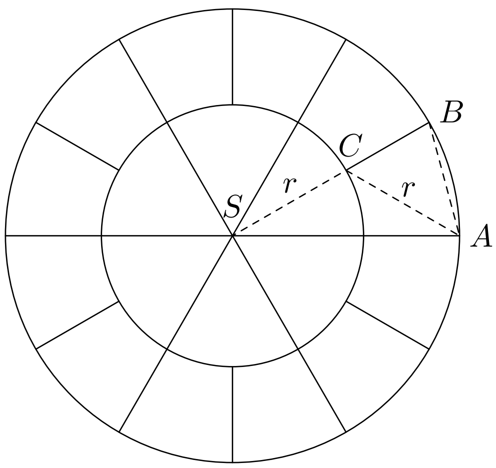
Porovnáním krajních výrazů dostaneme $a^2 \geqq 2^a$, což znamená, že $a \leqq 4$. Dokážeme totiž indukcí, že opačná nerovnost $a^2 < 2^a$ platí pro každé celé $a \geqq 5$. Pro $a = 5$ je to tak $(25 < 32)$; platí-li $a^2 < 2^a$ pro některé $a \geqq 5$, pak po vynásobení dvěma dostaneme $2a^2 < 2^{a+1}$, takže kýžená nerovnost $(a+1)^2 < 2^{a+1}$ je důsledkem nerovnosti $(a+1)^2 < 2a^2$, která je zřejmá, neboť je ekvivalentní s nerovností $1 < a(a-2)$, jež platí triviálně, ať je $a \geqq 5$ jakékoliv. Tím je důkaz indukcí hotov.

Ukázali jsme, že v každé hledané dvojici (a, b) musí platit $a \leqq 4$. Postupným dosazením hodnot $a = 1, 2, 3, 4$ do rovnice $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ zjistíme, že úloha má právě dvě řešení, a to $(a, b) = (2, 6)$ a $(a, b) = (4, 18)$.

---

2. *Kruhový terč o poloměru 12 cm zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7 cm.* (Vojtech Bálint, Jaromír Šimša)

Řešení. Označme $r = 4\sqrt{3}$ cm a celý terč o daném poloměru $r\sqrt{3}$ rozdělme na 18 částí. Prvních šest částí budou shodné výseče o středovém úhlu 60° v kruhu o poloměru r uprostřed terče. Zbylé mezikruží rozdělíme na 12 shodných „mezivýsečí“ o středovém úhlu 30° (obr. 1).



Obr. 1

Označme podle obrázku S střed terče a A, B, C vrcholy jedné ze zmíněných mezivýsečí. Protože kružnice ohraničující tyto části mají poloměry r a $r\sqrt{3}$ a protože $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, je zřejmě trojúhelník SAC rovnoramenný, takže $|AC| = r$; navíc je AC nejdelší stranou v trojúhelníku ABC, který má vnitřní úhly 45°, 75° a 60°. Proto je maximální vzdálenost dvou bodů jedné mezivýseče rovna r stejně jako maximální vzdálenost dvou bodů každé ze 6 výsečí středového kruhu o poloměru r. Podle Dirichletova principu některé dva z 19 zásahů leží ve stejné z 18 vytvořených částí, takže jejich vzdálenost je nejvýše r. Důkaz je hotov, protože platí $4\sqrt{3} < 7$ ($\Leftrightarrow 48 < 49$).

Poznámka. Uvažujme tvrzení: *Je-li v kruhu o poloměru $r\sqrt{3}$ vybráno N bodů, je vzdálenost některých dvou z nich nejvýše r.* Kdybychom chtěli takové tvrzení dokázat porovnáním součtu obsahů N shodných kruhů o průměru r s obsahem kruhu o průměru $r(1+2\sqrt{3})$, podaří se nám to, právě když bude platit

$$N \cdot \frac{\pi r^2}{4} > \frac{\pi r^2 \left(1+2\sqrt{3}\right)^2}{4} \quad \text{neboli} \quad N > 13 + 4\sqrt{3} \doteq 19{,}9.$$

V situaci dané úlohy, kdy je odhad r vzdálenosti dvou bodů zaměněn větší hodnotou $r_1 = r \cdot \dfrac{7}{4\sqrt{3}}$, má podobná podmínka tvar

$$N \cdot \frac{\pi r_1^2}{4} > \frac{\pi\left(r_1 + 2r\sqrt{3}\right)^2}{4}, \quad \text{po dosazení} \quad N > \left(1 + \frac{24}{7}\right)^2 \doteq 19{,}6.$$

Proto nelze takto jednoduchým postupem k řešení úlohy dospět.

---

3. *Rumburak unesl na svůj hrad 31 členů strany A, 28 členů strany B, 23 členů strany C, 19 členů strany D a každého zavřel do samostatné kobky. Po práci se občas mohli procházet po dvoře a povídat si. Jakmile si spolu začali povídat tři členové tří různých stran, Rumburak je za trest přeregistroval do čtvrté strany. (Nikdy si spolu nepovídali více než tři unesení.)*

a) *Mohlo se stát, že po určitém čase byli všichni unesení členy jedné strany? Které?*

b) *Určete všechny čtveřice celých kladných čísel, jejichž součet je 101 a které jako počty unesených členů čtyř stran umožňují, aby se Rumburakovou péčí časem všichni stali členy jedné strany.* (Vojtech Bálint, Jaromír Šimša)

Řešení. a) Označme a, b, c, d (proměnné) počty unesených členů stran A, B, C, D. Počáteční čtveřice $(a,b,c,d) = (31,28,23,19)$ je podle parity čísel typu (l,s,l,l), kde l, s označuje liché, resp. sudé číslo. Protože při každé přeregistraci se parita všech čísel a, b, c, d změní (tři z nich se totiž zmenší o 1 a čtvrté zvětší o 3), čtveřice typu (l,s,l,l) přejde ve čtveřici (s,l,s,s) a ta pak zase zpět ve čtveřici (l,s,l,l). Dostaneme-li tedy nakonec čtveřici se třemi nulami, musí být tato čtveřice typu (s,l,s,s), takže všichni unesení tehdy budou členy strany B.

Následující tabulka změn hodnot a, b, c, d ukazuje, že se všichni unesení mohou opravdu stát členy strany B:

a:	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	…	0
b:	28	27	26	25	24	23	26	29	32	35	…	101
c:	23	22	25	24	27	26	25	24	23	22	…	0
d:	19	22	21	24	23	26	25	24	23	22	…	0

b) Ukážeme, že hledané čtveřice (a,b,c,d) jsou právě ty, ve kterých *některá tři čísla dávají při dělení čtyřmi stejný zbytek.*

Z rovnosti $a+b+c+d = 101$ plyne, že tři z čísel a, b, c, d mají stejnou paritu a čtvrté paritu opačnou. S ohledem na symetrii hledejme výchozí čtveřice (a,b,c,d) za předpokladu

$$a \equiv b \equiv c \not\equiv d \pmod 2$$

a podle řešení části a) zkoumejme, kdy se všichni členové mohou stát členy strany D. Z toho, jak se mění počty a, b, c, d při každé přeregistraci (tři se zmenší o 1 a jedno zvětší o 3), plyne, že rozdíly $a-b$, $a-c$, $b-c$ nemění své zbytky při dělení čtyřmi.

Má-li nakonec platit $a = b = c = 0$, musí být uvedené tři rozdíly už na počátku dělitelné čtyřmi, takže výchozí počty a, b, c musí splňovat podmínku

$$a \equiv b \equiv c \pmod 4. \tag{1}$$

Ukažme, že podmínka (1) je pro splnění kýženého cíle $a = b = c = 0$ i postačující. Zřejmě stačí ukázat, že výchozí čtveřici (a, b, c, d) splňující podmínku (1) lze po několika krocích změnit na čtveřici typu (e, e, e, f), pak už totiž stačí opakovat úpravu $(e, e, e, f) \to (e-1, e-1, e-1, f+3)$.

Mějme tedy čtveřici celých kladných čísel (a, b, c, d) se součtem 101, která splňuje podmínku (1), a předpokládejme, že ještě neplatí $a = b = c$. Ukažme, jak v tomto případě povolenými kroky zvětšit hodnotu d (o 1 nebo 2). Protože vždy $d \leqq 101$, lze takové zvětšení zopakovat jen několikrát, pak již dosáhneme vytčeného cíle.

Proceduru zvětšení d jistě stačí popsat v případě, kdy $a \geqq b \geqq c$ a $a > c$, tedy $a - c \geqq 4$ díky podmínce (1).[1] Poraďme Rumburakovi dvojici kroků

$$(a, b, c, d) \to (a-1, b-1, c+3, d-1) \to (a-2, b-2, c+2, d+2),$$

která zvyšuje hodnotu d o 2. Tuto dvojici kroků nelze provést pouze v případě $b = 1$, kdy ovšem z (1) a nerovnosti $b \geqq c$ plyne rovněž $c = 1$. Na takovou čtveřici $(a, 1, 1, d)$, kde $a \geqq 5$ a $d \geqq 2$ (nemůže být ještě $d = 1$, protože d má odlišnou paritu), použije Rumburak trojici kroků

$$(a, 1, 1, d) \to (a-1, 4, 0, d-1) \to (a-2, 3, 3, d-2) \to (a-3, 2, 2, d+1),$$

která zvyšuje hodnotu d o 1.

Tvrzení o tvaru všech vyhovujících čtveřic z první věty řešení b) je dokázáno.

---

4. *Je dána kružnice k s tětivou AC, jež není průměrem. Na její tečně vedené bodem A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D průsečík kružnice k s vnitřkem úsečky XC (pokud existuje). Trojúhelník ACD doplníme na lichoběžník $ABCD$ vepsaný kružnici k. Určete množinu průsečíků přímek BC a AD odpovídajících všem takovým lichoběžníkům.* (Pavel Leischner)

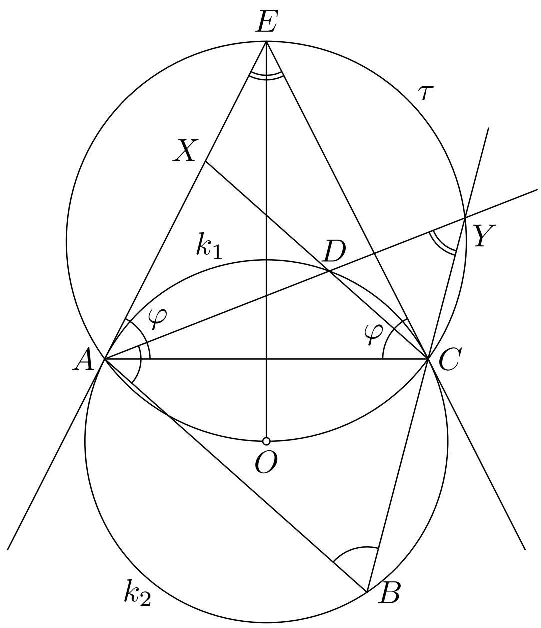
Řešení. Budeme dále uvažovat jen takové lichoběžníky $ABCD$, ve kterých platí $AB \parallel CD$, u ostatních průsečík (rovnoběžných) přímek BC a AD neexistuje.

Označme O střed kružnice k, E průsečík jejích tečen vedených body A, C (obr. 2). Jak víme, body A, C leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem OE a jsou podle tohoto průměru souměrně sdruženy. Společnou velikost ostrých úhlů při základně AC rovnoramenného trojúhelníku ACE označme φ. Konečně vnitřky kratšího a delšího oblouku AC kružnice k označme k_1, resp. k_2.

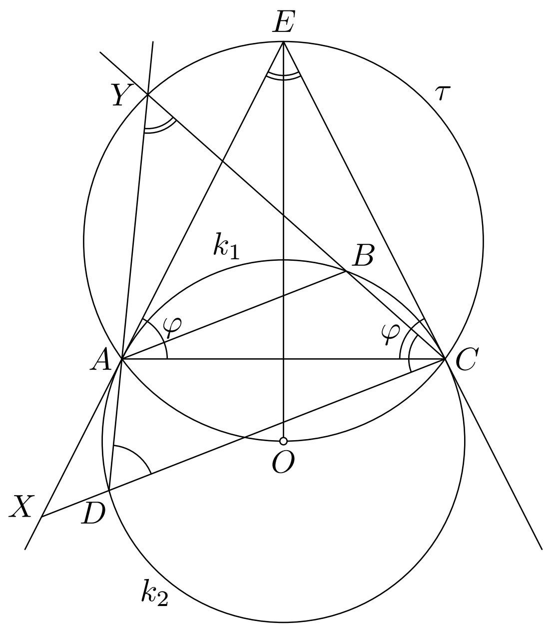
a) Zvolme na tečně AE libovolný bod X, $X \neq A$. Kružnice k zřejmě protne úsečku XC ve vnitřním bodě D, právě když bod X je buď vnitřním bodem úsečky AE, anebo vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce AE. Oba případy (obr. 2 a obr. 3) nyní posoudíme samostatně.

V prvním případě platí $D \in k_1$ a $B \in k_2$, takže podle věty o úsekovém úhlu je úhel ABC roven ostrému úhlu φ. Stejnou velikost má i úhel BAD, protože každý tětivový lichoběžník je rovnoramenný. Bod Y, průsečík různoběžných polopřímek BC a AD, tedy leží v polorovině ACE. Z rovnoramenných trojúhelníků ABY a ACE proto plyne, že

[1] Zdůrazněme, že nevylučujeme rovnost $c = 0$. Ke čtveřici s nulovým prvkem nás totiž dovede v další větě popsaná dvojice kroků v případě, kdy $b = 2$.



Obr. 2



Obr. 3

úhly AYC a AEC jsou shodné (mají velikost $\pi - 2\varphi$). Podle věty o obvodovém úhlu leží bod Y na oblouku AEC kružnice τ, přesněji uvnitř kratšího z jejích oblouků CE, neboť polopřímka AD leží v úhlu CAE.

Ve druhém případě je úvaha analogická a zapíšeme ji stručně: $D \in k_2$, $B \in k_1$, $|\sphericalangle ADC| = \varphi = |\sphericalangle BCD|$, průsečík Y různoběžných polopřímek CB a DA leží v polorovině ACE, a protože $|\sphericalangle AYC| = |\sphericalangle AEC|$, leží bod Y na kružnici τ, a to uvnitř jejího kratšího oblouku AE.

b) Ukážeme nyní, že naopak každý vnitřní bod Y kratších oblouků CE a AE kružnice τ je průsečíkem přímek BC a AD některého z uvažovaných lichoběžníků $ABCD$. Opět rozlišíme dva případy podle toho, na kterém z obou oblouků bod Y leží.

Je-li Y vnitřní bod oblouku CE, lze zřejmě sestrojit body $D \in k_1$ a $B \in k_2$ tak, aby body A, D, Y resp. B, C, Y ležely v uvedeném pořadí v přímce. Z $D \in k_1$ plyne existence průsečíku X polopřímky CD s vnitřkem úsečky AE (bod D pak odpovídá bodu X podle konstrukce ze zadání úlohy). Zbývá objasnit, proč $AB \parallel CD$. Protože body O a Y leží na různých obloucích AC kružnice τ a přitom $|AO| = |CO|$, je polopřímka YO osou úhlu AYC, takže přímky $A(D)Y$ a $B(C)Y$ jsou souměrně sdružené podle přímky YO, která je (triviálně) osou souměrnosti kružnice k, neboť prochází jejím středem. Proto podle této osy musí být souměrně sdruženy i průsečíky obou zmíněných přímek $A(D)Y$ a $B(C)Y$ s kružnicí k, tedy (díky určenému pořadí bodů) jednak body A a B, jednak body D a C. Obě úsečky AB a CD jsou proto kolmé na přímku OY, a jsou tudíž rovnoběžné.

Je-li Y vnitřní bod oblouku AE, sestrojíme body $D \in k_2$ a $B \in k_1$ tak, aby v přímce ležely body v pořadí D, A, Y, resp. C, B, Y. Polopřímka CD protne přímku AE v potřebném bodě X (protože $D \neq A$, bude jistě $X \neq A$), pokud platí $|\sphericalangle AEC| + |\sphericalangle ECD| < \pi$. To ověříme tak, že užijeme větu o obvodovém a úsekovém úhlu v kružnici k, podle které $|\sphericalangle ECD| = \pi - |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAY|$, a protože $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle AYC|$, je součet $|\sphericalangle AEC| + |\sphericalangle ECD|$ roven součtu dvou úhlů v trojúhelníku ACY. Ze sdruženosti přímek $D(A)Y$ a $C(B)Y$ podle osy OY úhlu AYC pak opět plyne požadovaná rovnoběžnost $AB \parallel CD$.

Závěr. Hledanou množinou je sjednocení vnitřků kratších oblouků CE a AE Thaletovy kružnice τ.

5. *Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, …, 33. V jednom kroku zvolíme na tabuli některá dvě čísla, jejichž součin je druhou mocninou přirozeného čísla, obě zvolená čísla smažeme a na tabuli napíšeme druhou odmocninu z jejich součinu. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen taková čísla, že součin žádných dvou z nich není druhou mocninou. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je týmž číslem.) Dokažte, že na tabuli zůstane aspoň 16 čísel.* (Peter Novotný)

Řešení. V jednom kroku nahrazujeme dvě čísla a, b jedním přirozeným číslem $\sqrt{ab}$. Protože pro libovolná $a \leqq b$ platí $a \leqq \sqrt{ab} \leqq b$, je zřejmé, že na tabuli budou stále zapsána pouze čísla z množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \dots, 33\}$. Je-li přitom číslo a prvočíslem nebo součinem několika různých prvočísel, musí tato prvočísla být obsažena i v rozkladu čísla $\sqrt{ab}$, takže $\sqrt{ab} = ka$ neboli $b = k^2a$ pro některé přirozené k. Je-li $k = 1$, musí být číslo a na tabuli zapsáno vícekrát. Je-li $k \geqq 2$, a tedy $b = k^2a \geqq 4a$, musí platit $4a \leqq 33$, a proto z $b = k^2a \in \mathsf{M}$ plyne i $4a \in \mathsf{M}$. Na tabuli tudíž zůstanou až do konce jednak všechna prvočísla, která dělí právě jedno z čísel množiny M, jednak všechna ta $a \in \mathsf{M}$, která jsou součinem několika různých prvočísel a zároveň splňují podmínku $4a > 33$ neboli $a \geqq 9$. V souhrnu jde celkem o 15 nesmazatelných čísel

$$10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33.$$

Ukážeme, že kromě nich bude na tabuli vždy zastoupeno aspoň jedno z čísel množiny $\mathsf{S} = \{6, 12, 18, 24\}$ (na začátku tam jsou všechna). Zvolíme-li v jednom kroku čísla a a b, kde např. $a \in \mathsf{S}$, a nahradíme je číslem $n = \sqrt{ab}$, musí být i číslo n násobkem šesti, který díky odhadům $a \leqq 24$ a $b \leqq 33$ splňuje nerovnost $n \leqq \sqrt{24 \cdot 33} = 6\sqrt{22} < 30$, takže bude platit $n \in \mathsf{S}$. Na tabuli po libovolném počtu kroků tudíž zůstane 15 výše zapsaných čísel a aspoň jedno číslo z S, tedy alespoň 16 čísel, jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Počtu 16 čísel na tabuli lze například dosáhnout 17 kroky, popsanými níže tak, že mazaná čísla v každém řádku jsou šedá, zatímco nově vzniklé číslo je připsáno na konci dalšího řádku:

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33;
1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,29,30,31,32,33,14;
1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,29,30,31,32,33,14;
1,2,3,4,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,25,26,27,29,30,31,32,33,14,10;
1,2,3,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,26,27,29,30,31,32,33,14,10,10;
1,2,3,6,8,9,11,12,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,26,27,29,30,31,32,33,14,10,10;
1,2,3,6,8,9,11,12,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,26,27,29,30,31,32,33,14,10;
1,2,3,6,8,9,11,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,26,29,30,31,32,33,14,10,18;
1,2,3,8,9,11,13,15,16,17,18,19,21,22,23,26,29,30,31,32,33,14,10,18,12;
1,2,3,8,9,11,13,15,16,17,19,21,22,23,26,29,30,31,32,33,14,10,12,18;
1,3,8,9,11,13,15,16,17,19,21,22,23,26,29,30,31,32,33,14,10,12,6;
1,3,9,11,13,15,16,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,12,6,16;
1,3,9,11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,12,6,16;
3,9,11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,12,6,4;
9,11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,6,4,6;
11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,6,6,6;
11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,6,6;
11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,6.

6. *Najděte minimum výrazu*

$$\frac{a+b+c}{2}-\frac{[a,b]+[b,c]+[c,a]}{a+b+c},$$

kde proměnné a, b, c jsou libovolná celá čísla větší než 1 *a* $[x,y]$ *označuje nejmenší společný násobek čísel x, y.* (Tomáš Jurík)

Řešení. S ohledem na symetrii stačí uvažovat trojice (a,b,c), ve kterých $a \geqq b \geqq c$. Pro „nejmenší" z nich $(2,2,2)$, $(3,2,2)$, $(3,3,2)$, $(3,3,3)$ a $(4,2,2)$ má daný výraz hodnoty 2, 3/2, 17/8, 7/2, resp. 11/4. Ukážeme-li, že pro všechny ostatní trojice (a,b,c), které již splňují podmínku $a+b+c \geqq 9$, platí nerovnost

$$\frac{a+b+c}{2}-\frac{[a,b]+[b,c]+[c,a]}{a+b+c} \geqq \frac{3}{2},$$

bude to znamenat, že hledaná nejmenší hodnota je rovna 3/2. Vypsanou nerovnost ekvivalentně upravme:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2-2([a,b]+[b,c]+[c,a]) &\geqq 3(a+b+c),\\ a^2+b^2+c^2+2(ab-[a,b])+2(bc-[b,c])+2(ca-[c,a]) &\geqq 3(a+b+c).\end{aligned}$$

Protože zřejmě platí $xy \geqq [x,y]$ pro libovolná x, y, zanedbáme nezáporné dvojnásobky v levé straně poslední nerovnosti a dokážeme (silnější) nerovnost

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 3(a+b+c). \tag{1}$$

Z předpokladu $a+b+c \geqq 9$ a Cauchyovy nerovnosti $3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$ plyne

$$a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3(a+b+c)\cdot\frac{a+b+c}{9} \geqq 3(a+b+c),$$

a důkaz je hotov.

Poznámky. Místo Cauchyovy nerovnosti jsme mohli přepsat (1) do tvaru

$$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+\left(c-\frac{3}{2}\right)^2 \geqq \frac{27}{4}$$

a tuto nerovnost zdůvodnit umocněním zřejmých nerovností

$$a-\frac{3}{2} \geqq \frac{5}{2}, \quad b-\frac{3}{2} \geqq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad c-\frac{3}{2} \geqq \frac{1}{2},$$

neboť uvažujeme už jen trojice, ve kterých $a \geqq 4$, $b \geqq c \geqq 2$.

Postup z řešení vede rovněž k výsledku, že pro libovolná celá čísla a, b, c větší než 1 platí nerovnost

$$\frac{a+b+c}{2}-\frac{[a,b]+[b,c]+[c,a]}{a+b+c} \geqq \frac{a+b+c}{6}.$$