51. Mezinárodní matematická olympiáda

Martin Panák, MU Brno

Padesátý první ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 2. do 14. července 2010 v Kazachstánu. Olympiády se zúčastnilo 523 soutěžících z 98 zemí, méně než v loňském roce.

České družstvo tvořili tito soutěžící: *David Klaška* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Radek Marciňa* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, *Miroslav Olšák* z Gymnázia Buďánka v Praze, *Petr Ryšavý* z Gymnázia Jaroslava Heyrovského v Praze, *Jáchym Sýkora* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze a *Tomáš Zeman* z Gymnázia Jana Keplera v Praze. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl *dr. Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *dr. Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Kazachstán je devátou největší zemí na světě (co se týče rozlohy) a organizátoři to dali účastníkům pocítit. Vedoucí jednotlivých národních družstev zahajovali program v městě Almaty (dříve Alma-Ata, do roku 1997 hlavní město Kazachstánu). Po výběru úloh a jejich překladu do národních jazyků následoval asi tisícikilometrový letecký přesun do současného hlavního města Astany. Tam proběhlo 5.července v Paláci nezávislosti slavnostní zahájení olympiády, kterého se zúčastnil i kazašský ministr školství a vědy *Zhanseit Tuimebayev.* Zahájení bylo velkolepé, ve stylu nám dobře známých estrád. Na pódiu se vystřídalo několik folklórních souborů oblečených v bohatých kazašských krojích, místní „folklór-metalová“ kapela a zpěvák se „zlatým hlasem“. Nechyběla společná píseň všech vystoupivších na závěr. Po zahájení následoval pro vedoucí delegací půlhodinový přesun do hotelu. Pro soutěžící byl přesun osmihodinový (v autobusech) a to do dětského tábora Baldauren, ležícího v pěkném prostředí národního parku, asi 250km od Astany. Již o půlnoci před soutěží se dostala většina řešitelů do svých pokojů, ti průbojnější pak dostali i večeři. Aby po takto náročném dni soutěžící náhodou nezaspali, zajistili organizátoři následující den (první soutěžní) operativně budíček na půl sedmou, což se setkalo s velkým ohlasem.

V Baldaurenu se konala také vlastní soutěž, která jako vždy probíhala ve dvou dnech, přičemž každý den soutěžící řešili během čtyř a půl hodiny tři příklady. O bezpečnost soutěžících bylo výborně postaráno, tábor střežila policie a nikdo nesměl tam ani ven (k řešitelům nesměli ani pedagogičtí vedoucí, kteří byli ubytování odděleně). Také podmínky pro řešení měli řešitelé v podstatě stejné: všem byly odebrány vlastní rýsovací potřeby a každý z účastníků dostal od organizátorů pravítko a kružítko. Pravda, některá kružítka měla místo tradiční konstrukce s jednou špicí a jednou tuhou špice dvě, což někteří řešitelé nelibě nesli. Mnohým proto byla tato novátorská kružítka vyměněna za klasická. O těchto věcech se jury (složená z vedoucích jednotlivých národních delegací) dozvídala na začátku obou soutěžních dní v době vyhrazené na otázky soutěžících (na jiných mezinárodních olympiádách bývá zvykem, že soutěžící pokládají zejména otázky související s textem soutěžních úloh).

Na této olympiádě došlo rovněž k výměně v čele Poradního výboru (Advisory Board) mezinárodní matematické olympiády, což je orgán, který připravuje fungování mezinárodní olympiády, zvláště pak sonduje a jedná se zeměmi, které mají zájem o uspořádání této soutěže. Kromě výměny řadových členů výboru nastala změna i v osobě předsedy: dlouholetého předsedu *Józsefa Pelikana* z Maďarska nahradil ruský matematik *Nazar Agakhanov*.

Dva dny před ukončením olympiády vedoucí i účastníci společně navštívili „dostihové“ závodiště. Nicméně hlavním programem nebyly dostihy ale vystoupení kazašské artistické skupiny, která na koních předváděla neuvěřitelné dovednosti. Zvláště srdce obdivovatelů krásy koní zaplesalo a zážitek z tohoto vystoupení dal zapomenout na předchozí příhody.

Slavnostní zakončení olympiády se neslo v podobném duchu jako zahájení, dostavil se však i kazašský premiér *Karim Massimov*. Na závěr byla slavnostně předána vlajka Mezinárodní matematické olympiády zástupcům hostitelské země příští matematické olympiády. Ta proběhne v Amsterdamu v Nizozemí.

Co se týče výsledků českého družstva, tak ačkoliv tým získal v součtu 84 bodů, pouze o tři body méně než loňský rok, tak to v celkovém pořadí zemí stačilo jen na 48. místo (proti loňskému čtyřicátému místu), což nás i tak řadí do první poloviny soutěžního pole. V individuálním hodnocení dosáhli studenti David Klaška a Miroslav Olšák shodným bodovým ziskem na bronzové medaile, Radek Marciňa, Jáchym Sýkora a Tomáš Zeman získali čestná uznání za bezchybně vyřešený příklad. Všichni tři vyřešili bezchybně dokonce dva příklady, což bohužel o jediný bod nestačilo na bronzovou medaili.

V tradičním sledovaném česko-slovenském duelu jsme letos našim východním bratrům podlehli (umístili se na děleném 39. místě). Zejména stojí za zmínku výkon talentovaného Martina Vodičky z Košic, který coby patnáctiletý získal zlatou medaili.

Závěrem lze říci, že organizátoři vložili do pořádání olympiády nemalé úsilí a ještě více finančních prostředků, což bylo patrné doslova na každém kroku. Buď jak buď, tato olympiáda zanechala u všech účastníků hluboké zážitky, na které budou dlouho vzpomínat.

V následujícím přehledu můžete zjistit celkové absolutní pořadí jednotlivých účastníků českého a slovenského družstva:

Pořadí	**Jméno**	**Body za úlohu číslo**							**Cena**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
175.–187.	David Klaška	7	1	0	3	7	0	18	B
175.–187.	Miroslav Olšák	7	2	0	2	7	0	18	B
267.–313.	Radek Marciňa	7	0	0	7	0	0	14	HM
267.–313.	Jáchym Sýkora	7	0	0	7	0	0	14	HM
267.–313.	Tomáš Zeman	7	0	0	7	0	0	14	HM
446.–461.	Petr Ryšavý	6	0	0	0	0	0	6	
	Celkem	41	3	0	26	14	0	84	
42.–47.	Martin Vodička	7	1	0	7	6	6	27	G
200.–226.	Ladislav Bačo	7	2	0	7	0	0	16	B
227.–266.	Michal Hagara	7	0	0	7	1	0	15	B
314.–337.	Martin Bachratý	7	3	0	3	0	0	13	HM
352.–366.	Marián Horňák	7	1	0	3	0	0	11	HM
367.–386.	Jakub Konečný	7	0	0	3	0	0	10	HM
	Celkem	42	7	0	30	7	6	92	

Pro úplnost uvádíme tabulku pořadí zemí podle počtu dosažených bodů společně s počty medailí, které získali (čísla v závorce za názvem země značí počet reprezentantů, pokud byl nižší než šest):

	Země	**Medaile**			**b.**
		G	S	B	
1.	ČLR	6	0	0	197
2.	Rusko	4	2	0	169
3.	USA	3	3	0	168
4.	Korea	4	2	0	156
5.–6.	Kazachstán	3	2	0	148
	Thajsko	1	5	0	148
7.	Japonsko	2	3	0	141
8.	Turecko	1	3	2	139
9.	Německo	1	3	2	138
10.	Srbsko	1	3	2	135
11.–12.	Itálie	1	3	2	133
	Vietnam	1	4	1	133
13.–14.	Kanada	2	1	2	129
	Maďarsko	2	2	1	129
15.	Austrálie	1	3	1	128
16.–17.	Írán	0	4	2	127
	Rumunsko	2	1	2	127
18.	Peru	1	3	1	124
19.	Tchaj-wan	1	3	1	123
20.	Hongkong	1	2	3	121
21.	Bulharsko	1	2	3	118
22.–23.	Singapur	0	4	1	117
	Ukrajina	1	2	3	117
24.	*Polsko*	2	1	1	116
25.	Velká Británie	1	1	2	114
26.	Uzbekistán	0	4	1	112
27.	Belgie	0	2	3	110
28.	Ázerbájdžán	0	3	2	109
29.	Nový Zéland	0	2	4	106
30.–31.	Francie	0	3	1	105
	Indonézie	0	1	4	105
32.	Chorvatsko	0	2	3	103
33.	Mexiko	0	1	4	102
34.	Gruzie	0	2	2	101
35.	Brazílie	0	2	1	99
36.	Indie	0	2	1	98
37.	Řecko	0	2	0	95
38.	Nizozemsko	0	0	5	94
39.–43.	Argentina	0	1	2	92
	Litva	0	1	3	92
	Moldavsko	0	1	3	92
	Slovensko	1	0	2	92
	Švýcarsko	0	0	3	92
44.	Turkmenistán	0	1	2	91
45.	Dánsko	1	0	2	90
46.	Španělsko	0	1	2	89
47.	Rakousko	1	0	1	87
48.	*Česká republika*	0	0	2	84

	Země	**Medaile**			**b.**
		G	S	B	
49.	Bělorusko	0	0	2	80
50.	Mongolsko	0	0	2	79
51.–52.	Slovinsko	0	0	2	78
	Srí Lanka	0	0	1	78
53.	Izrael (5)	0	1	1	76
54.–55.	Malajsie	0	1	1	75
	Portugalsko	0	0	1	75
56.	Tádžikistán	0	1	0	73
57.	Lotyšsko	0	0	2	72
58.–59.	JAR	0	0	2	69
	Makedonie	0	1	0	69
60.	Bolívie	0	0	0	64
61.	Arménie	0	0	1	63
62.	Kypr	0	0	1	62
63.–64.	Estonsko	0	0	0	61
	Kyrgyzstán	0	1	1	61
65.	Kolumbie (4)	0	0	3	60
66.	Kambodža	0	0	0	58
67.–68.	Maroko	0	0	1	55
	Saudská Arábie	0	0	2	55
69.–70.	Bangladéš (5)	0	0	1	54
	Pobřeží slonoviny (5)	0	1	0	54
71.	Island	0	0	0	53
72.–73.	Finsko	0	0	1	52
	Švédsko	0	0	0	52
74.	Filipíny (3)	0	1	0	45
75.	Norsko	0	0	0	41
76.	Ekvádor	0	0	1	39
77.	Trinidad a Tobago (5)	0	1	0	37
78.	Portoriko (2)	1	0	0	34
79.–80.	Kostarika (3)	0	0	1	32
	Panama (2)	0	0	2	32
81.–82.	Lucembursko (3)	0	0	0	31
	Tunisko (2)	0	1	0	31
83.	Sýrie	0	0	0	29
84.	Nigérie (5)	0	0	1	27
85.–86.	Kuba (1)	0	1	0	26
	Paraguay (4)	0	0	0	26
87.	Salvádor (3)	0	0	0	25
88.	Honduras (1)	0	1	0	21
89.	Pákistán (5)	0	0	0	19
90.	Irsko	0	0	0	18
91.	Venezuela (2)	0	0	0	16
92.	Guatemala (2)	0	0	0	12
93.	Albánie (4)	0	0	0	11
94.	Bosna a Hercegovina (4)	0	0	0	8
95.	Černá hora (4)	0	0	0	7
96.	Kuvajt (5)	0	0	0	2

Soutěžní úlohy byly následující (v závorkách jsou uvedeny názvy zemí, které úlohu do soutěže navrhly):

1. soutěžní den (7. 7. 2010)

1. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor$$

pro libovolná reálná x, y. (Symbol $\lfloor z \rfloor$ značí největší celé číslo nepřevyšující z.)

2. Nechť I je střed kružnice vepsané a Γ kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Nechť přímka AI protíná kružnici Γ v bodě D ($D \neq A$). Dále nechť na oblouku BDC je dán bod E a na straně BC bod F tak, že platí

$$|\measuredangle BAF| = |\measuredangle CAE| < \frac{1}{2}|\measuredangle BAC|.$$

Konečně nechť G je středem úsečky IF. Dokažte, že průsečík přímek DG a EI leží na kružnici Γ.

3. Nechť $\mathbb{N}$ je množina všech celých kladných čísel. Určete všechny funkce $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná celá kladná m, n je číslo

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

druhou mocninou celého kladného čísla.

2. soutěžní den (16. 7. 2009)

4. Nechť bod P leží uvnitř trojúhelníku ABC. Přímky AP, BP a CP protínají kružnici Γ opsanou trojúhelníku ABC po řadě v bodech K, L a M (různých od A, B, C). Tečna ke kružnici Γ v bodě C protíná přímku AB v bodě S. Dokažte, že pokud mají úsečky SC a SP stejnou délku, pak jsou stejně dlouhé i úsečky MK a ML.

5. V každé ze šesti schránek B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 a B_6 je na počátku jedna mince. Se schránkami můžeme provádět následující dvě operace:

1) Vybrat neprázdnou schránku B_j, kde $1 \leq j \leq 5$, odebrat z ní jednu minci a přidat dvě mince do schránky B_{j+1}.
2) Vybrat neprázdnou schránku B_k, kde $1 \leq k \leq 4$, odebrat z ní jednu minci a navzájem vyměnit obsahy (případně prázdných) schránek B_{k+1} a B_{k+2}.

Rozhodněte, zda je možné pomocí konečného počtu těchto operací dosáhnout toho, aby schránky B_1, B_2, B_3, B_4 a B_5 byly prázdné a schránka B_6 obsahovala právě $2010^{2010^{2010}}$ mincí. (Připomínáme, že $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

6. Je dána posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kladných reálných čísel. Nechť s je celé kladné takové, že pro všechna $n > s$ platí

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} | 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Dokažte, že pak existují kladná celá N a ℓ ($\ell \leq s$) taková, že $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ pro všechna $n \geq N$.