60. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *V oboru reálných čísel vyřešte soustavu*

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} &= z+1,\\ \sqrt{y^2+z^2} &= x+1,\\ \sqrt{z^2+x^2} &= y+1.\end{aligned}$$

Řešení. Umocněním a odečtením prvních dvou rovností dostaneme $x^2 - z^2 = (z+1)^2 - (x+1)^2$, což upravíme na $2(x^2 - z^2) + 2(x - z) = 0$ neboli

$$(x - z)(x + z + 1) = 0. \tag{1}$$

Analogicky bychom dostali další dvě rovnice, jež vzniknou z (1) cyklickou záměnou neznámých $x \to y \to z$. Vzhledem k této symetrii (daná soustava se nezmění dokonce při libovolné permutaci neznámých) stačí rozebrat jen následující dvě možnosti:

Pokud $x = y = z$, přejde původní soustava v jedinou rovnici $\sqrt{2x^2} = x + 1$, jež má dvě řešení $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Každá z trojic $\bigl(1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2}\bigr)$ je zřejmě řešením i původní soustavy.

Pokud jsou naopak některá dvě z čísel x, y, z různá, například $x \neq z$, plyne z (1) rovnost $x + z = -1$. Dosazením $x + 1 = -z$ do druhé rovnice soustavy dostáváme $y = 0$ a poté ze třetí rovnice vyjde $x^2 + (x+1)^2 = 1$ neboli $x(x+1) = 0$. Poslední rovnice tak má dvě řešení $x = 0$ a $x = -1$, jimž odpovídají $z = -1$ a $z = 0$. Snadno ověříme, že obě nalezené trojice $(0, 0, -1)$ a $(-1, 0, 0)$ jsou řešením dané soustavy stejně jako trojice $(0, -1, 0)$, kterou dostaneme jejich permutací.

Daná soustava má celkem pět řešení:

$$(0,0,-1),\ (0,-1,0),\ (-1,0,0),\ \bigl(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\bigr) \text{ a } \bigl(1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\bigr).$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$\begin{aligned}x^2 &= y+z+1,\\ y^2 &= z+x+1,\\ z^2 &= x+y+1.\end{aligned}$$

[$(0,0,-1)$, $(0,-1,0)$, $(-1,0,0)$, $(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ a $(1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$]

N2. V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$\begin{aligned}\sqrt{x-y^2} &= z-1,\\ \sqrt{y-z^2} &= x-1,\\ \sqrt{z-x^2} &= y-1.\end{aligned}$$

[59–A–S–1]

N3. Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro které platí

$$\begin{aligned}x^2 + xy &= y^2 + z^2,\\ z^2 + zy &= y^2 + x^2.\end{aligned}$$

[58–B–I–2]

N4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x + y &= 1,\\
x - y &= a,\\
-4ax + 4y &= z^2 + 4
\end{aligned}
$$

o neznámých x, y, z a reálném parametru a. [58–B–II–1]

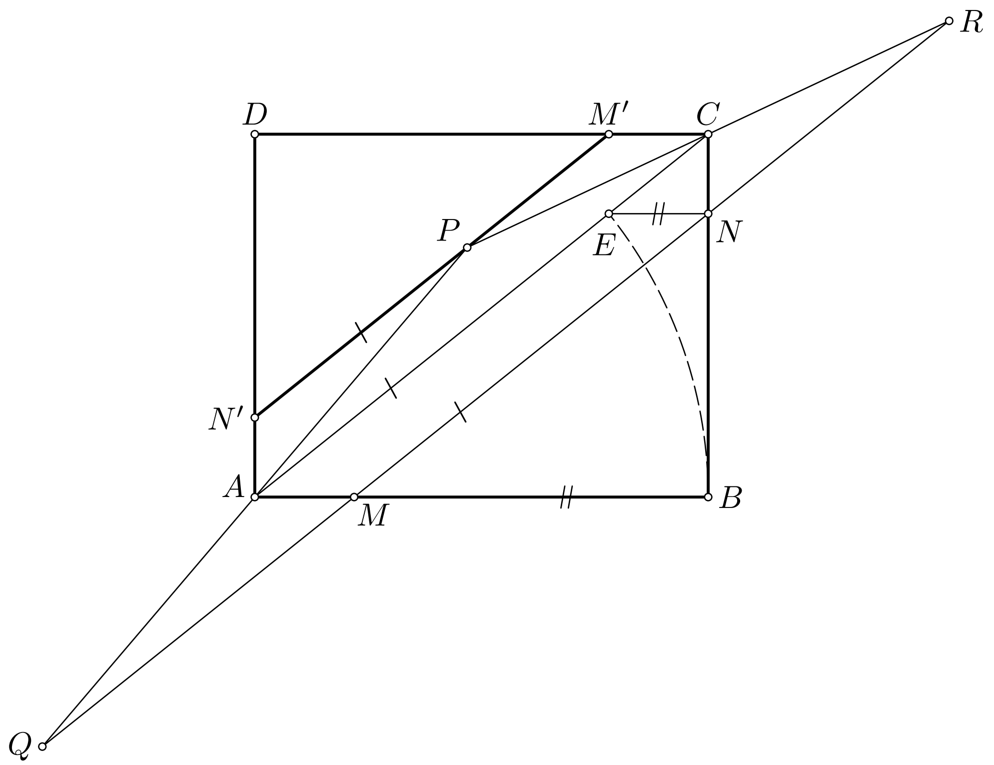
N5. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2yz &= 6(y + z - 2),\\
y^2 + 2zx &= 6(z + x - 2),\\
z^2 + 2xy &= 6(x + y - 2).
\end{aligned}
$$

[A–53–S–3]

2. *Uvažujme vnitřní bod P daného obdélníku $ABCD$ a označme po řadě Q, R obrazy bodu P v souměrnostech podle středů A, C. Předpokládejme, že přímka QR protne strany AB a BC ve vnitřních bodech M a N. Sestrojte množinu všech bodů P, pro něž platí $|MN| = |AB|$.*

Řešení. Úhlopříčka AC daného obdélníku $ABCD$ je ze zadání střední příčkou v trojúhelníku PQR, a tedy $AC \parallel QR$, jinak řečeno $AC \parallel MN$. Úsečka MN je tak jednoznačně určena tím, že je rovnoběžná s AC, leží v opačné polorovině určené přímkou AC než bod P a pro její délku platí $|MN| = |AB|$. Konstrukci bodů M a N lze provést několika způsoby. Lze k tomu například využít rovnoběžník $AMNE$ (obr. 1), v němž platí $|AE| = |MN| = |AB|$.



Obr. 1

Protože úsečka MN zároveň určuje přímku, na níž leží strana QR trojúhelníku PQR, je zřejmé, že vrchol P musí ležet na přímce p, jež je obrazem přímky MN v osové souměrnosti podle přímky AC (obsahující střední příčku trojúhelníku PQR). Přímka p má s vnitřkem daného obdélníku společný vnitřek úsečky $M'N'$ (jež je navíc obrazem nalezené úsečky MN ve středové souměrnosti podle středu daného obdélníku).

Snadno vidíme, že i naopak ke každému vnitřnímu bodu P úsečky $M'N'$ leží odpovídající body Q, R na přímce MN a body M, N jsou tak průsečíky přímky QR se stranami AB, BC, takže vyhovují podmínkám úlohy.

Závěr. Hledanou množinou všech bodů P dané vlastnosti je tedy vnitřek výše popsané úsečky $M'N'$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dána kružnice k s průměrem AB. K libovolnému bodu Y kružnice k, $Y \neq A$, sestrojme na polopřímce AY bod X, pro který platí $|AX| = |YB|$. Určete množinu všech takových bodů X. [56–B–I–2]

N2. V rovině daného čtverce $KLMN$ určete množinu všech bodů P, pro něž jsou úhly NPK, KPL a LPM shodné. [53–A–I–2]

N3. Je dán rovnostranný trojúhelník MPQ. Najděte množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC takových, že body P, Q jsou paty výšek z vrcholů A, B a bod M je střed strany AB. [51–B–I–6]

N4. Jsou dány kružnice k a l s různými poloměry, které se vně dotýkají v bodě T. Průsečíkem M jejich společných vnějších tečen veďme sečnu s obou kružnic. Označme X ten z obou průsečíků kružnice k se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Podobně označme Y ten z obou průsečíků kružnice l se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Nechť P je takový bod, že $XTYP$ je rovnoběžník. Určete množinu bodů P odpovídajících všem takovým sečnám s. [49–B–I–4]

3. *Nechť a, b, c jsou reálná čísla, jejichž součet je 6. Dokažte, že aspoň jedno z čísel*

$$ab + bc, \quad bc + ca, \quad ca + ab$$

není větší než 8.

Řešení. Jistě stačí ukázat, že součet zkoumaných tří čísel nepřevyšuje 24:

$$(ab + bc) + (bc + ca) + (ca + ab) = 2(ab + bc + ca) \leqq \frac{2}{3}(a + b + c)^2 = 24,$$

kde nerovnost je důsledkem nerovnosti

$$3(ab + bc + ca) \leqq (a + b + c)^2 = 36,$$

která je ekvivalentní nerovnosti $0 \leqq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$, jež je splněna pro každá tři reálná a, b, c.

Jiné řešení. S ohledem na symetrii předpokládejme, že platí $a = \min\{a, b, c\}$. Z rovnosti $a + b + c = 6$ pak plyne $a \leqq 2$ a $b + c \geqq 4$. Proto třetí zkoumané číslo, rovné $a(b + c)$, má stejné znaménko jako číslo a, takže je zaručeně menší než 8, platí-li $a \leqq 0$. Je-li naopak $0 < a \leqq 2$, všimneme si, že ze zřejmé nerovnosti $0 \leqq (u - v)^2$, platné pro libovolná reálná u, v, plyne úpravou odhad $4uv \leqq (u + v)^2$; dosadíme-li sem $u = 2a$ a $v = b + c$, dostaneme

$$8a(b + c) \leqq (2a + b + c)^2 = (a + 6)^2 \leqq 8^2 = 64,$$

odkud po dělení osmi vychází kýžená nerovnost $a(b + c) \leqq 8$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí

$$1 \leqq a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1-a)(1-b)(1-c) \leqq 9.$$

[55–B–II–4]

N2. 2. Splňují-li reálná čísla a, b, c, d rovnosti

$$a^2+b^2=b^2+c^2=c^2+d^2=1,$$

platí nerovnost

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \leqq 3.$$

Dokažte a zjistěte, kdy přitom nastane rovnost. [55–C–II–2]

4. *Najděte všechna celá čísla n, pro něž je zlomek*

$$\frac{n^3+2\,010}{n^2+2\,010}$$

roven celému číslu.

Řešení. Zlomek

$$\frac{n^3+2\,010}{n^2+2\,010}=n-\frac{2\,010(n-1)}{n^2+2\,010}$$

je celé číslo, právě když $n^2+2\,010$ je dělitel čísla $2\,010(n-1)=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67(n-1)$.

Není-li n násobek prvočísla 67, jsou čísla $n^2+2\,010$ a 67 nesoudělná, proto $n^2+2\,010$ musí být dělitelem čísla $30(n-1)$. Protože $|30(n-1)|<n^2+2\,010$, vyhovuje jenom $n=1$.

Nechť $n=67m$, kde m je celé. Potom

$$\frac{2\,010(n-1)}{n^2+2\,010}=\frac{30(67m-1)}{67m^2+30}.$$

Není-li m násobkem pěti, musí být číslo $67m^2+30$ dělitelem čísla $6(67m-1)$. Pro $|m|\leqq 4$ tomu tak ale není a pro $|m|\geqq 6$ je $|6(67m-1)|<67m^2+30$. Je tedy $m=5k$, kde k je celé. Potom

$$\frac{30(67m-1)}{67m^2+30}=\frac{6(335k-1)}{335k^2+6}.$$

Pro $|k|\geqq 7$ je absolutní hodnota tohoto zlomku nenulová a menší než 1. Ze zbylých čísel vyhovují $k=0$ a $k=-6$.

Číslo $\dfrac{n^3+2\,010}{n^2+2\,010}$ je tedy celé, právě když je celé n některé z čísel $0, 1$ nebo $-2\,010$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte nejmenší přirozené číslo n, pro které je podíl $\frac{n^2+15n}{33\,000}$ přirozené číslo. [56–B–S–3]

N2. Najděte všechny dvojice (p,q) reálných čísel takové, že mnohočlen x^2+pxq je dělitelem mnohočlenu x^4+px^2+q. [56–B–I–5]

5. *Zabývejme se otázkou, které trojúhelníky ABC s ostrými úhly při vrcholech A a B mají následující vlastnost: Vedeme-li středem výšky z vrcholu C tři přímky rovnoběžné se stranami trojúhelníku ABC, protnou je tyto přímky v šesti bodech ležících na jedné kružnici.*

a) Ukažte, že vyhovuje každý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C.

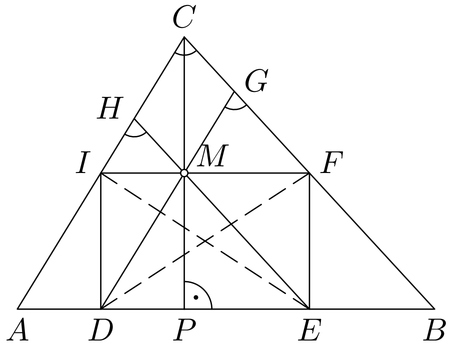
b) Vysvětlete, proč žádný jiný trojúhelník ABC nevyhovuje.

Řešení. I když doporučujeme řešit obě části úlohy odděleně (tj. nejprve analyzovat situaci v pravoúhlém trojúhelníku), popíšeme rovnou jejich společné řešení. Celou úlohu lze totiž formulovat jako důkaz tvrzení, že sestrojených šest bodů leží na kružnici, právě když je úhel ACB pravý.

Uvažujme tedy libovolný trojúhelník ABC s ostrými úhly α, β a označme M střed výšky CP a D, E, F, G, H, I uvažované průsečíky tak, aby s vrcholy A, B, C a patou výšky P ležely na hranici trojúhelníku v pořadí

$$A,\ D,\ P,\ E,\ B,\ F,\ G,\ C,\ H,\ I.$$

Z konstrukce plyne, že body M, D, I jsou středy stran pravoúhlého trojúhelníku ACP a body M, E, F jsou středy stran pravoúhlého trojúhelníku BCP. Oba čtyřúhelníky $PMID$ a $PMFE$ jsou tedy pravoúhelníky, takže i $DEFI$ je pravoúhelník (obr. 2). Jeho vrcholy D, E, F, I proto *vždy* leží na jedné kružnici a úsečky DF a EI jsou její průměry. Naší úlohou je proto zjistit, kdy na této kružnici leží i body G a H. To lze podle Thaletovy věty vyjádřit podmínkou, že úhly DGF a EHI jsou pravé. Protože $DG \parallel AC$ a $EH \parallel BC$, jsou oba úhly DGF a EHI shodné s úhlem ACB a ekvivalence s podmínkou pravého úhlu ACB je tak dokázána.



Obr. 2

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a P, Q paty kolmic z vrcholu C k přímkám, na kterých leží osy vnitřních úhlů BAC a ABC. Dokažte, že přímky AB a PQ jsou rovnoběžné. [51–A–S–2]

N2. Uvnitř stran BC, CA, AB daného ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou po řadě vybrány body X, Y a Z. Dokažte, že každému ze čtyřúhelníků $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ lze opsat kružnici, právě když body X, Y, Z jsou paty výšek trojúhelníku ABC. [51–B–S–2]

6. *Určete počet desetimístných čísel, v nichž lze škrtnout dvě sousední číslice, a dostat tak číslo 99krát menší.*

Řešení. Nechť n je číslo splňující podmínky zadání. Škrtnutím dvou posledních číslic zmenšíme n alespoň stokrát, proto se můžeme omezit na škrtání číslic, které nejsou poslední. Po škrtnutí dvou sousedních číslic zůstanou z čísla n dvě části, přitom první část může být prázdná, pokud jsme škrtli jeho první dvě číslice.

Nechť a je číslo určené první částí čísla n (nula v případě, že první část je prázdná), b je číslo určené vyškrtnutými dvěma číslicemi a c je určeno poslední částí čísla n (počet číslic této části označme k). Podle zadání platí

$$99(a \cdot 10^k + c) = a \cdot 10^{k+2} + b \cdot 10^k + c,$$

po úpravě $98c = 10^k(a + b)$. Protože $c < 10^k$, musí být $98 > a + b$. Navíc číslo 49 dělí $a+b$, neboť je samo nesoudělné s 10^k. Kladný celočíselný podíl $(a+b)/49$ je menší než 2, musí tedy být roven 1, takže $a + b = 49$. Odtud vyplývá rovnost

$$c = \frac{10^k}{2} = 5 \cdot 10^{k-1},$$

kde číslo k je zároveň určeno počtem číslic čísla a (označíme-li l počet číslic čísla a, je $k = 10 - l - 2$, přičemž v případě $a = 0$ klademe přirozeně $l = 0$).

Z uvedeného postupu plyne, že pro každé $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 49\}$ a $b = 49 - a$ existuje právě jedno číslo c, pro něž popsané číslo n splňuje podmínky zadání, a že jiná vyhovující n neexistují. Ukážeme, že všech 50 takových n (končících sedmi, šesti, nebo pěti nulami) je navzájem různých.

Sestrojené n končící sedmi nulami je jediné ($a = 0$). Šesti nulami končí 9 sestrojených čísel ($a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$) a jsou navzájem různá, neboť začínají různými číslicemi. Pěti nulami končí 40 sestrojených čísel ($a \in \{10, 11, \ldots, 49\}$) a jsou navzájem různá, neboť začínají různými dvojčíslími.

Pro názornost vypišme ještě několik čísel vyhovujících zadání tak, jak je dostaneme pomocí našich úvah: pro $a = 0$ máme $b = 49$, $c = 50\,000\,000$ a $n = 4\,950\,000\,000$, pro $a = 1$ je $b = 48$, $c = 5\,000\,000$ a $n = 1\,485\,000\,000$, pro $a = 2$ je $n = 2\,475\,000\,000, \ldots$, pro $a = 9$ je $n = 9\,405\,000\,000$, pro $a = 10$ je $b = 39$, $c = 500\,000$ a $n = 1\,039\,500\,000, \ldots$, pro $a = 49$ je $b = 0$, $c = 500\,000$ a $n = 4\,900\,500\,000$.

Závěr. Existuje 50 čísel, jež vyhovují zadání.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Ukažte, že škrtnutím posledních dvou číslic alespoň trojmístného čísla dostaneme číslo minimálně stokrát menší než původní číslo.

N2. Přirozené číslo nazveme *vlnitým*, pokud pro každé tři po sobě jdoucí číslice a, b, c jeho desítkového zápisu platí $(a-b)(b-c) < 0$. Dokažte, že z číslic 0,1,...,9 je možno sestavit více než 25 000 desetimístných vlnitých čísel, která obsahují všechny číslice od nuly do devítky (číslice 0 nemůže být na prvním místě). [56–B–II–3]

N3. Určete největší dvojmístné číslo k s následující vlastností: existuje přirozené číslo N, z něhož po škrtnutí první číslice zleva dostaneme číslo k-krát menší. (Po vyškrtnutí číslice může zápis čísla začínat jednou či několika nulami.) K určenému číslu k pak najděte nejmenší vyhovující číslo N. [56–C–II–4]

N4. Určete počet všech trojic dvojmístných přirozených čísel a, b, c, jejichž součin abc má zápis, ve kterém jsou všechny číslice stejné. Trojice lišící se pouze pořadím čísel považujeme za stejné, tj. započítáváme je pouze jednou. [54–C–I–5]