60. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Lucie napsala na tabuli dvě nenulová čísla. Potom mezi ně postupně vkládala znaménka plus, mínus, krát a děleno a všechny čtyři příklady správně vypočítala. Mezi výsledky byly pouze dvě různé hodnoty. Jaká dvě čísla mohla Lucie na tabuli napsat?*

Řešení. Označme hledaná čísla a, b. Protože $b \neq 0$, je nutně $a + b \neq a - b$. Každé z čísel $a \cdot b$, $a : b$ je proto rovno buď $a + b$, anebo $a - b$. Stačí tedy rozebrat čtyři případy a v každém z nich vyřešit soustavu rovnic. Ukážeme si trochu důmyslnější postup.

Kdyby platilo

$$a + b = a \cdot b \quad \text{a} \quad a - b = a : b \qquad \text{anebo} \qquad a + b = a : b \quad \text{a} \quad a - b = a \cdot b,$$

vynásobením rovností bychom v obou případech dostali $a^2 - b^2 = a^2$, což odporuje podmínce $b \neq 0$. Proto jsou čísla $a \cdot b$ a $a : b$ buď obě rovna $a + b$, anebo obě rovna $a - b$. Tak či tak musí platit $a \cdot b = a : b$, odkud po úpravě $a(b^2 - 1) = 0$. Protože $a \neq 0$, nutně $b \in \{1, -1\}$.

Pokud je tedy $b = 1$, jsou čtyři výsledky postupně $a + 1$, $a - 1$, a, a, což jsou pro libovolné a tři různé hodnoty.

Pro $b = -1$ dostáváme výsledky $a - 1$, $a + 1$, $-a$, $-a$. To budou dvě různá čísla, právě když $a-1 = -a$ anebo $a+1 = -a$. V prvním případě dostáváme $a = \frac{1}{2}$, ve druhém $a = -\frac{1}{2}$.

Lucie mohla na začátku na tabuli napsat buď čísla $\frac{1}{2}$ a -1, anebo čísla $-\frac{1}{2}$ a -1.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Máme tři čísla se součtem 2 010, přičemž každé z nich je aritmetickým průměrem zbylých dvou. Jaká jsou to čísla? [Sestavíme a vyřešíme soustavu rovnic, čísla musejí být stejná, a jsou tedy rovna 670.]

N2. Máme tři čísla, o nichž víme, že každé z nich je aritmetickým průměrem některých dvou z našich tří čísel. Dokažte, že naše tři čísla jsou stejná. [Předpokládejme, že některé z našich čísel je průměrem sebe a jiného z našich čísel. Potom je umíme označit a, b, c tak, že $a = \frac{1}{2}(a + b)$. Z této rovnosti plyne $a = b$. Číslo c je buď průměrem čísel a a b, odkud hned máme, že se těmto číslům rovná, anebo je průměrem sebe a některého z čísel a, b, tedy $c = \frac{1}{2}(c + a)$, z toho opět dostaneme $c = a = b$. Jestliže každé z našich čísel je aritmetickým průměrem zbylých dvou, postupujeme podobně jako v předchozí úloze.]

D1. Nechť n je přirozené číslo větší než 2. Máme n čísel se součtem n, přičemž každé z nich je aritmetickým průměrem ostatních čísel. Jaká jsou to čísla? [Uspořádejme naše čísla podle velikosti, nechť $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$. Aritmetický průměr jakékoliv skupiny čísel není menší než nejmenší z nich. Aritmetický průměr čísel $x_2, x_3, \ldots, x_n$ je proto aspoň x_2 a je roven x_1 jen v případě, že žádné z čísel $x_3, \ldots, x_n$ není větší než x_1. Z toho hned dostáváme, že všechna naše čísla musejí být stejná, a tedy rovna 1.]

2. *Dokažte, že výrazy $23x + y$, $19x + 3y$ jsou dělitelné číslem 50 pro stejné dvojice přirozených čísel x, y.*

Řešení. Předpokládejme, že pro dvojici přirozených čísel x, y platí $50 \mid 23x + y$. Potom pro nějaké přirozené číslo k platí $23x + y = 50k$. Z této rovnosti dostaneme

$y = 50k - 23x$, tedy $19x + 3y = 19x + 3(50k - 23x) = 150k - 50x = 50(3k - x)$, takže číslo $19x + 3y$ je rovněž násobkem čísla 50.

Podobně to funguje i z druhé strany. Jestliže pro nějakou dvojici přirozených čísel x, y platí $50 \mid 19x+3y$, je $19x+3y = 50l$ pro nějaké přirozené číslo l. Z této rovnosti vyjádříme číslo y; dostaneme $y = (50l-19x)/3$ (další postup by byl podobný, i kdybychom vyjádřili x místo y). Po dosazení vyjde

$$23x + y = 23x + \frac{50l - 19x}{3} = \frac{69x + 50l - 19x}{3} = \frac{50 \cdot (x + l)}{3}.$$

O výsledném zlomku víme, že je to přirozené číslo. Čitatel toho zlomku je dělitelný číslem 50. Ve jmenovateli je jen číslo 3, které je s 50 nesoudělné, proto se číslo 50 nemá s čím ze jmenovatele zkrátit, tudíž číslo $23x + y$ je dělitelné 50.

Jiné řešení. Zřejmě $3 \cdot (23x + y) - (19x + 3y) = 50x$, proto jestliže 50 dělí jedno z čísel $23x + y$ a $19x + 3y$, dělí i druhé z nich.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ukažte, že každé prvočíslo větší než 3 se dá napsat ve tvaru $6k + 1$ anebo $6k - 1$ pro vhodné přirozené číslo k. [Každé prvočíslo se dá napsat ve tvaru $6k + z$, kde z je jeho zbytek po dělení šesti. Čísla $6k$, $6k + 2$ a $6k + 4$ jsou evidentně dělitelná dvěma, $6k + 3$ je dělitelné třemi, proto zůstávají jen čísla tvaru $6k + 1$ a $6k + 5$.]

N2. Nechť $x + 5y$ dává zbytek 1 po dělení 7. Jaký zbytek po dělení 7 dává číslo $3x + 15y$? A číslo $4x + 13y$? [Protože $x + 5y = 7k + 1$ pro vhodné k, máme $3x + 15y = 3(7k + 1) = 7 \cdot 3k + 3$, jeho zbytek je tedy 3. Podobně $4x + 20y = 4(7k + 1) = 7 \cdot 4k + 4$; číslo $4x + 13y$ se od $4x + 20y$ liší jen o násobek 7, proto dává stejný zbytek 4.]

D1. Dokažte, že jestliže pro celá čísla a, b, c platí $7 \mid a - 3b + 5c$, pak platí i $7 \mid 4a + 2b - c$. Zjistěte, zda platí opačná implikace. [Platí i opačná implikace. Návod: $(4a + 2b - c) - 4(a - 3b + 5c) = 14b - 21c = 7(2b - 3c)$.]

D2. Dokažte, že ke každému celému číslu x existuje celé číslo y takové, že $19x + 3y$ je dělitelné 50. [Číslo $19x$ dává po dělení 50 zbytek, který označíme z. Chceme ukázat, že pro libovolné z umíme najít y tak, aby číslo $3y$ dávalo zbytek $50 - z$. Vezměme čísla $3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \ldots, 3 \cdot 50$. Kdyby dvě z těchto čísel, řekněme $3i$ a $3j$, dávala stejný zbytek, musel by být jejich rozdíl $3(i - j)$ dělitelný 50. Přitom 3 a 50 jsou nesoudělná, proto $50 \mid i - j$. To však není možné, neboť $1 \leqq i - j \leqq 49$. Proto vyjmenovaná čísla dávají všechny možné zbytky po dělení 50, takže jedno z nich dává zbytek $50 - z$.]

3. *Máme čtverec $ABCD$ se stranou délky 1 cm. Body K a L jsou středy stran DA a DC. Bod P leží na straně AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na straně BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL se protínají v bodě X. Obsahy čtyřúhelníků $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupně S_A, S_B, S_C, S_D (obr. 1).*

a) Dokažte, že $S_B = S_D$.

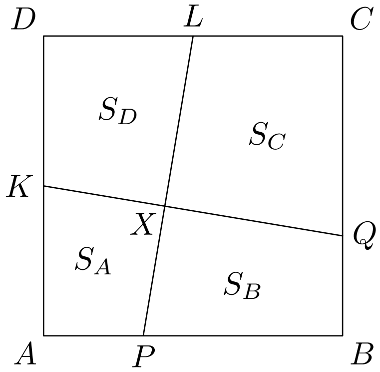
b) Vypočtěte rozdíl $S_C - S_A$.

c) Vysvětlete, proč neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$.

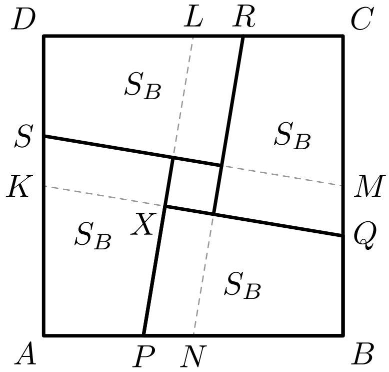
Řešení. a) Čtyřúhelníky $ABQK$ a $DAPL$ jsou shodné (jeden z nich je obrazem druhého v otočení o 90° se středem ve středu čtverce $ABCD$). Proto mají i stejný obsah, tedy $S_A + S_B = S_A + S_D$. Z toho hned dostáváme $S_B = S_D$.

b) Snadno se nám podaří vypočítat obsah pravoúhlého lichoběžníku $ABQK$, neboť známe délky základen i výšku. Dostaneme $S_A + S_B = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}\,\mathrm{cm}^2$. Podobně výpočtem obsahu lichoběžníku $PBCL$ dostaneme $S_C + S_B = (\frac{1}{2} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}\,\mathrm{cm}^2$. Odečtením první získané rovnosti od druhé dostáváme $S_C - S_A = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}\,\mathrm{cm}^2$.

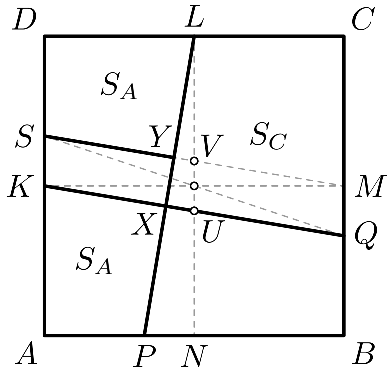
c) Nerovnost mezi obsahy $S_A + S_C$ a $S_B + S_D$ (jejichž přímé výpočty jsou nad síly žáků 1. ročníku) můžeme zdůvodnit následujícím způsobem. Součet těchto dvou obsahů



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

je $1\,\mathrm{cm}^2$, takže se nerovnají, právě když je jeden z nich menší než $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Bude to obsah $S_B + S_D$ (rovný $2S_B$, jak už víme), když ukážeme, že obsah S_B je menší než $\frac{1}{4}\,\mathrm{cm}^2$. Uděláme to tak, že do celého čtverce $ABCD$ umístíme bez překrytí čtyři exempláře dotyčného čtyřúhelníku $PBQX$. Jak, to je patrné z obr. 2, kde M, N značí středy stran BC, AB a R, S body, jež dělí strany CD, DA v poměru $1:2$.

Jiné řešení části c). Tentokrát místo nerovnosti $S_B + S_D < \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$ dokážeme ekvivalentní nerovnost $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Proto se pokusíme „přemístit“ čtyřúhelník $APXK$ tak, aby ležel při čtyřúhelníku $XQCL$ a aby se jejich obsahy daly i geometricky sečíst. Úhly AKQ a DLP jsou shodné a $|AK| = |DL|$, proto můžeme čtyřúhelník $APXK$ přemístit ve čtverci $ABCD$ do jeho „rohu“ D tak, že se ke čtyřúhelníku $XQCL$ „přimkne“ podél strany LX svou stranou LY, kde Y je průsečík úseček SM a PL z původního řešení (obr. 3). Obsah $S_A + S_C$ je pak obsahem šestiúhelníku $DSYXQC$. Proč je větší než $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$, lze zdůvodnit například takto:

Úsečka spojující bod L se středem U úsečky KQ protne úsečku SM v jejím středu V. Čtyřúhelník $UQMV$ má obsah rovný polovině obsahu rovnoběžníku $KQMS$, tedy rovný obsahu trojúhelníku KMS. Proto má šestiúhelník $DSVUQC$ obsah rovný obsahu čtyřúhelníku $KMCD$, tj. polovině obsahu čtverce $ABCD$. Obsah $S_A + S_C$ je ještě větší, a to o obsah čtyřúhelníku $XUVY$. Je tedy vskutku $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dán lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a průsečíkem úhlopříček P. Víme, že obsah trojúhelníku ABP je 16 a obsah trojúhelníku BCP je 10.
  a) Vypočítejte obsah trojúhelníku ADP.
  b) Vypočítejte obsah lichoběžníku $ABCD$.
[Trojúhelníky ABC a ABD mají společnou stranu AB a stejné výšky na tuto stranu, mají tedy stejný obsah. Proto mají stejný obsah i trojúhelníky ADP a BCP. Obsah trojúhelníku CDP vypočteme například z jeho podobnosti s trojúhelníkem ABP, poměr podobnosti je $|AP|/|CP| = S_{ABP}/S_{CBP}$. Dostaneme $S_{ABCD} = 169/4$.]

N2. Ve čtverci $ABCD$ o straně délky 1 označme K, L po řadě středy stran AB, AD. Přímky CK a BL se protínají v bodě M, přímky CL a KD se protínají v bodě N. Ukažte, že součet obsahů trojúhelníků KBM, KLN a CDN není větší než $3/8$. [Přímo vypočítat obsahy jednotlivých trojúhelníků jde jen těžko. Pomohlo by přemístit tyto trojúhelníky „více k sobě“, aby se jejich obsahy daly geometricky sečíst. Například díky osové souměrnosti podle přímky AC je trojúhelník KLN shodný s trojúhelníkem KLM. A obsah trojúhelníku KBL už vypočítáme snadno, je to $1/8$. Zbývá ukázat, že obsah trojúhelníku DCN je menší než $1/4$. To je hned vidět z toho, že trojúhelník DCN je částí trojúhelníku DCL s obsahem $1/4$.]

D1. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu C a P, Q odpovídající paty kolmic vedených bodem D na strany AC a BC. Obsahy trojúhelníků ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočítejte $S_1 : S_3$, jestliže $S_1 : S_2 = 2 : 3$ a $S_3 : S_4 = 3 : 8$. [C–55–I–5]

D2. V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme E střed strany BC a F střed strany AD. Dokažte, že trojúhelníky AED a BFC mají stejný obsah, právě když jsou strany AB a CD rovnoběžné. [C–54–I–3]

D3. Spojnice středů stran AB a CD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ rozdělí tento čtyřúhelník na dvě části o stejném obsahu. Ukažte, že přímky AB a CD jsou rovnoběžné. [Označme S a T po řadě středy stran AB a CD. Trojúhelníky DST a CST mají stejný obsah (stejně dlouhé strany DT a CT, společnou výšku). Proto trojúhelníky ADS a BCS mají stejný obsah, a protože mají stejně dlouhé strany AS a BS, musejí mít i stejné výšky, body D a C jsou tedy stejně vzdáleny od přímky AB.]

D4. Najděte všechny konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ s následující vlastností: v rovině čtyřúhelníku $ABCD$ existuje bod P takový, že každá přímka vedená bodem P rozdělí čtyřúhelník $ABCD$ na dvě části o stejném obsahu. [49–A–II–4]

4. *Ve skupině n žáků spolu někteří kamarádí. Víme, že každý má mezi ostatními aspoň čtyři kamarády. Učitelka chce žáky rozdělit do dvou nejvýše čtyřčlenných skupin tak, že každý bude mít ve své skupině alespoň jednoho kamaráda.*

a) Ukažte, že v případě $n = 7$ lze žáky požadovaným způsobem rozdělit.

b) Zjistěte, zda lze žáky takto rozdělit i v případě $n = 8$.

Řešení. a) Jediný způsob, jak rozdělit 7 žáků na dvě nejvýše čtyřčlenné skupiny, je mít jednu trojčlennou a jednu čtyřčlennou skupinu. Každý žák ze čtyřčlenné skupiny přitom bude mít ve své skupině kamaráda při jakémkoli rozdělení, protože se nemůže stát, že by všichni jeho kamarádi byli v trojčlenné skupině (jsou aspoň čtyři).

Takže stačí rozdělit žáky tak, aby každý v trojčlenné skupině v ní měl kamaráda. Proto do ní dáme kteréhokoli ze žáků a k němu některé dva jeho kamarády.

b) Vezměme si jakékoli rozdělení 8 žáků na dvě čtyřčlenné skupiny (skupiny s jiným počtem žáků nepřipadají v úvahu). Jestliže toto rozdělení nevyhovuje učitelčině záměru, máme nějakého žáka X, jenž je *zle zařazen* – má všechny své čtyři kamarády A, B, C, D ve druhé skupině. Ukážeme, že umíme vyměnit X a některého ze žáků A, B, C, D tak, že celkový počet zle zařazených žáků v nově vzniklých skupinách se oproti původnímu stavu zmenší.

Po libovolné ze čtyř výměn přicházejících do úvahy přestane být X zle zařazen a všichni tři žáci, kteří se s ním octnou ve skupině, budou dobře zařazeni, neboť jsou to jeho kamarádi. Žáci K, L, M, kteří byli před výměnou ve skupině s X, mohou být po výměně zle zařazeni jen tehdy, pokud byli zle zařazeni i předtím (neboť X není kamarádem ani jednoho z nich). Protože žák K má čtyři kamarády a nekamarádí se s X, musí mít aspoň jednoho kamaráda Y i ve skupině obsahující žáky A, B, C, D. Právě tento žák Y se hodí pro zamýšlenou výměnu s žákem X, neboť po ní i on bude mít ve své nové skupině kamaráda – totiž žáka K.

Ukázali jsme tedy, že výměnou žáků X a Y počet zle zařazených žáků klesne. Dostaneme nějaké nové rozdělení; jestliže v něm je aspoň jeden žák zle zařazen, můžeme zopakovat předchozí postup a opět snížit počet zle zařazených žáků. Po nejvýše osmi krocích dostaneme rozdělení, v němž už nejsou žádní zle zařazení žáci.

Jiné řešení části b). Uvažujme všechna možná rozdělení osmi žáků do dvou čtyřčlenných skupin. Rozdělení, kde někdo nemá ve své skupině žádného kamaráda, budeme nazývat *zlá*, zbylá budou *dobrá*.

Kolik je zlých rozdělení? Jestliže má žák X aspoň pět kamarádů, aspoň jeden z nich musí být v jeho skupině. Jestliže má žák X jen čtyři kamarády a jsou-li všichni ve druhé skupině, máme jen jedno jediné rozdělení s touto vlastností. Celkově tedy k danému žákovi X existuje nejvýše jedno rozdělení, jež je zlé. Za X můžeme vzít jednoho z 8 různých žáků, proto zlých rozdělení je nejvýše 8 (některá možná počítáme víckrát). Přitom všech rozdělení je $\binom{7}{3} = 35$, tedy aspoň 27 z nich je dobrých.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. V jisté třídě má každý žák aspoň jednoho kamaráda. Ukažte, že umíme žáky rozdělit na dvě skupiny tak, že každý má ve druhé skupině aspoň jednoho kamaráda. [K úloze se dá přistupovat vícerými poučnými způsoby, viz vzorové řešení úlohy č. 5 v 3. sérii zimní části korespondenčního matematického semináře (KMS), ročník 2005/6, `http://kms.sk/archiv`.]

N2. Každý ze šesti žáků jisté třídy má mezi ostatními pěti aspoň tři kamarády. Kamarádství je vzájemné. Ukažte, že umíme tyto žáky rozdělit do dvou (neprázdných) skupin tak, že každý žák má ve své skupině aspoň jednoho kamaráda. Uměli bychom to i tehdy, kdyby každý žák měl přesně dva kamarády? [Jestliže rozdělíme žáky jakýmkoli způsobem na dvojici a čtveřici, pak každý žák ze čtveřice v ní má aspoň jednoho kamaráda, neboť z jeho aspoň tří kamarádů jsou nejvýše dva ve druhé skupině. Stačí tedy vzít dvojici kamarádů a ostatní dát do druhé skupiny. Jestliže má každý přesně dva kamarády, umíme žáky rovněž rozdělit: vezmeme žáka A a jeho dva kamarády B a C a všechny je dáme do první skupiny. Zbylí tři žáci D, E, F budou tvořit druhou skupinu. Kdyby některý žák z druhé skupiny, řekněme D, měl za kamaráda B i C, měli by žáci E a F nejvýše po jednom kamarádovi. Proto D má za kamaráda nejvýše jednoho z B a C, a protože nemůže kamarádit s A (ten už dva kamarády má), musí mít za kamaráda aspoň jednoho ze žáků E a F. Podobně to funguje pro žáky E a F. O situaci se šesti žáky, z nichž každý má přesně dva kamarády, umíme říci dokonce více. Jestliže si znázorníme žáky jako body a kamarádský vztah vyznačíme spojením odpovídajících bodů, můžeme dostat jen dva různé obrázky: dva trojúhelníky, anebo šestiúhelník (při vhodném rozmístění bodů v rovině).]

D1. Ve skupině n lidí ($n \geqq 4$) se někteří znají. Vztah „znát se“ je vzájemný: jestliže osoba A zná osobu B, tak i B zná A a nazýváme je dvojicí známých.

a) Dokažte, že jestliže mezi každými čtyřmi osobami jsou aspoň čtyři dvojice známých, pak každé dvě osoby, které se neznají, mají společného známého.

b) Zjistěte, pro která $n \geqq 4$ existuje skupina osob, v níž jsou mezi každými čtyřmi osobami aspoň tři dvojice známých a současně se některé dvě osoby ani neznají, ani nemají společného známého.

c) Rozhodněte, zda ve skupině šesti osob mohou být v každé čtveřici právě tři dvojice známých a právě tři dvojice neznámých. [C–57–I–5]

D2. Jistý panovník pozval na oslavu svých narozenin 28 rytířů. Každý z rytířů měl mezi ostatními právě tři nepřátele.

a) Ukažte, že panovník může rytíře rozsadit ke dvěma stolům tak, aby každý rytíř seděl u stejného stolu nejvýše s jedním nepřítelem.

b) Ukažte, že v případě libovolného takového rozsazení sedí u každého stolu nejvýše 16 rytířů.

(Nepřátelství je vzájemný vztah: Jestliže A je nepřítelem B, je i B nepřítelem A.) [51–C–I–6]

5. *Dokažte, že nejmenší společný násobek $[a, b]$ a největší společný dělitel (a, b) libovolných dvou kladných celých čísel a, b splňují nerovnost*

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geqq 2ab.$$

Zjistěte, kdy v této nerovnosti nastane rovnost.

Řešení. Nerovnost by bylo lehké dokázat, kdyby některý ze dvou sčítanců na levé straně byl sám aspoň roven pravé straně. Číslo $[a, b]$ je zjevně násobkem čísla a.

Jestliže $[a, b] \geqq 2a$, pak $b[a, b] \geqq 2ab$ a v dané nerovnosti platí dokonce ostrá nerovnost, neboť číslo $a(a, b)$ je kladné.

Jestliže $[a, b] < 2a$, tak nezůstává jiná možnost než $[a, b] = a$. To však nastane, jen když $b \mid a$. V tomto případě $(a, b) = b$ a v dané nerovnosti nastane rovnost.

Jiné řešení. Označme $d = (a, b)$, takže $a = ud$ a $b = vd$ pro nesoudělná přirozená čísla u, v. Odtud hned plyne, že $[a, b] = uvd$. Protože

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] = ud^2 + uv^2d^2 = u(1 + v^2)d^2,$$
$$2ab = 2uvd^2,$$

je vzhledem k nerovnosti $ud^2 > 0$ nerovnost ze zadání ekvivalentní s nerovností $1 + v^2 \geqq \geqq 2v$, tedy $(v-1)^2 \geqq 0$, což platí pro každé v. Rovnost nastane, právě když $v = 1$, tedy $b \mid a$.

Jiné řešení. Označme $d = (a, b)$. Je známo, že $[a, b] \cdot (a, b) = ab$. Po vyjádření $[a, b]$ z tohoto vztahu, dosazení do dané nerovnosti a ekvivalentní úpravě dostaneme ekvivalentní nerovnost $d^2 + b^2 \geqq 2bd$, která platí, neboť $(d-b)^2 \geqq 0$. Rovnost nastává jen pro $d = b$, tedy pokud $b \mid a$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť d je největší společný dělitel přirozených čísel a a b. Ukažte, že čísla a/d a b/d jsou celá a nesoudělná.

N2. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b platí vztah $[a, b] \cdot (a, b) = ab$. [Úvaha o exponentech jednotlivých prvočísel, anebo standardním způsobem: nechť $d = (a, b)$, potom $a = xd$, $b = yd$ pro nesoudělná x a y, tedy $[a, b] = xyd$.]

N3. Ukažte, že výraz $[a, 15]/a$, kde a je přirozené číslo, může nabývat jen čtyř různých hodnot, které jsou všechny celočíselné. Kolik různých celočíselných hodnot může nabýt výraz $[60, b]/2b$? [Výraz $[a, 15]/a$ může nabývat hodnot 1, 3, 5, 15. Výraz $[60, b]/2b$ může nabýt celočíselné hodnoty 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, kromě toho nabývá hodnoty 1/2, 3/2, 5/2, 15/2.]

N4. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b platí

$$4ab \leqq (a+b)^2 \leqq 2(a^2 + b^2).$$

[Obě nerovnosti se dají přímočaře odvodit z toho, že čtverec reálného čísla je nezáporný.]

D1. Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c, pro které současně platí $[ab, c] = 2^8$, $[bc, a] = 2^9$, $[ca, b] = 2^{11}$. [50–C–S–1]

D2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro které platí $[a, b] + (a, b) = 63$. [50–C–I–3]

D3. Najděte všechny dvojice kladných celých čísel a, b, pro které má výraz

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$$

celočíselnou hodnotu. [Nechť $d = (a, b)$, potom $a = xd$, $b = yd$ pro nesoudělná x a y. Zkoumaný výraz bude po dosazení $(9x^2+14y^2)/(9xy)$, takže $9x \mid 14y^2$, a z nesoudělnosti x a y máme $x \mid 14$, navíc $3 \mid y$. Podobně $y \mid 9$; vyzkoušíme konečně mnoho možností.]

D4. Dokažte, že pro libovolná dvě různá kladná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

[58–C–I–6]

6. *Je dán lichoběžník $ABCD$. Střed základny AB označme P. Uvažujme rovnoběžku se základnou AB, která protíná úsečky AD, PD, PC, BC postupně v bodech K, L, M, N.*

a) Dokažte, že $|KL| = |MN|$.

b) Určete polohu přímky KL tak, aby platilo i $|KL| = |LM|$.

Řešení. a) Přímky AB, CD a KL jsou rovnoběžné, proto v dané situaci dovedeme najít vícero dvojic trojúhelníků podobných vždy podle věty *uu*. Tyto podobnosti lze výhodně zapsat pomocí poměrů vzdáleností, což využijeme v důkazu toho, že úsečky KL a MN mají stejnou délku.

Označme x vzdálenost přímek AB a KL a y vzdálenost přímek KL a CD. Pomocí těchto vzdáleností nyní vyjádříme koeficienty podobnosti odpovídajících trojúhelníků.

Trojúhelníky APD a KLD jsou podobné, proto

$$\frac{|KL|}{|AP|} = \frac{y}{x+y}.$$

Trojúhelníky BPC a NMC jsou podobné, proto

$$\frac{|MN|}{|PB|} = \frac{y}{x+y}.$$

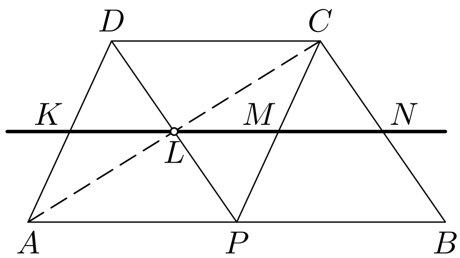
Spojením obou rovností dostáváme

$$\frac{|KL|}{|AP|} = \frac{y}{x+y} = \frac{|MN|}{|PB|},$$

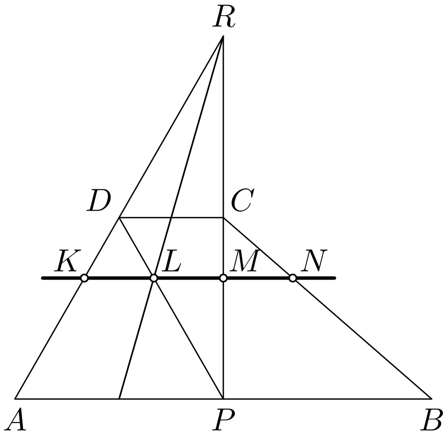
a protože $|AP| = |PB|$, plyne odtud $|KL| = |MN|$.

b) Chceme sestrojit bod L úsečky PD takový, že $|KL| = |LM|$. Rozebereme dva případy podle toho, zda je či není přímka PC rovnoběžná s přímkou AD.

Jestliže je přímka PC rovnoběžná s AD, je $APCD$ rovnoběžník a jediný vyhovující bod L je střed úsečky PD neboli průsečík úhlopříček rovnoběžníku $APCD$ (podmínka $|KL| = |LM|$ tu vyjadřuje shodnost trojúhelníků KLD a MLP, která nastane, právě když $|LD| = |LP|$, obr. 4).



Obr. 4



Obr. 5

Jestliže se přímky PC a AD protínají v nějakém bodě R (obr. 5), bude bod L průsečíkem úsečky DP s přímkou, na níž leží těžnice trojúhelníku APR z vrcholu R. Plyne to z poznatku, že s úsečkou AP jsou podle středu R stejnolehlé všechny v úvahu připadající úsečky KM, a proto středy všech těchto úseček leží na přímce jdoucí bodem R a středem úsečky AP.

Z uvedených konstrukcí plyne, že vyhovující bod L je vždy jediný, existuje tudíž právě jedna rovnoběžka s přímkou AB s požadovanými vlastnostmi.

Poznámka. Jak jsme uvedli v řešení, pokud jsou přímky PC a AD rovnoběžné, je hledaným bodem L, pro který platí $|KL| = |LM|$, průsečík úhlopříček rovnoběžníku $APCD$. Pokud přímky PC a AD rovnoběžné nejsou, tj. $APCD$ je lichoběžník, je i v tomto případě průsečík jeho úhlopříček výborným kandidátem pro takový bod L. Výpočtem s využitím podobnosti se dá ukázat, že tomu tak vskutku je, takže hledaným bodem L je v každém případě průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $APCD$ (viz též úlohu N1).

Návodné a doplňující úlohy:

N1. V lichoběžníku $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček P sestrojme rovnoběžku se základnou AB procházející bodem P. Tato přímka protne ramena AD a BC v bodech K a L. Ukažte, že bod P je středem úsečky KL. Vypočítejte délku úsečky KL, jestliže víte, že $|AB| = a$, $|CD| = c$. [Využijeme podobnost dvojic trojúhelníků DKP a DAB, CPL a CAB, PAB a PCD. Označíme-li v_1 výšku trojúhelníku PAB a v_2 výšku trojúhelníku PCD, je $|KP| = |LP| = a \cdot v_2/(v_1 + v_2)$. Odtud $|KL| = 2ac/(a + c)$.]

N2. Je dán lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB. Nechť X, Y jsou po řadě průsečíky dvojic přímek AD a BC, AC a BD. Dokažte, že body X, Y a středy základen lichoběžníku $ABCD$ leží na jedné přímce. [Stejnolehlost se středem v bodě X zobrazující úsečku AB na úsečku CD zobrazí střed jedné základny do středu druhé základny, proto středy základen a bod X leží v přímce. Analogicky leží v přímce středy základen a bod Y. Je vhodné zkusit i řešení využívající jen podobnost trojúhelníků bez odkazu na vlastnosti stejnolehlosti.]

D1. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme E střed strany AB, F střed úsečky DE a G průsečík úseček BD a CE. Vyjádřete obsah lichoběžníku $ABCD$ pomocí jeho výšky v a délky d úsečky FG za předpokladu, že body A, F, C leží na jedné přímce. [56–C–I–4]

D2. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s výškou 3 cm a shodnými stranami BC, CD a DA, pro nějž platí: Na základně AB existuje bod E takový, že úsečka DE má délku 5 cm a dělí lichoběžník na dvě části se stejnými obsahy. [52–C–I–4]