60. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. Určete všechna reálná čísla c, pro která má rovnice

$$x^2 + \frac{5}{2}x + c = 0$$

dva reálné kořeny, jež lze s číslem c uspořádat do trojčlenné aritmetické posloupnosti.

2. Nechť P, Q, R jsou body přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC, pro něž platí $|AP| = |PQ| = |QR| = |RB| = \frac{1}{4}|AB|$. Dokažte, že průsečík M kružnic opsaných trojúhelníkům APC a BRC, který je různý od bodu C, splývá se středem S úsečky CQ.

3. Dokažte, že pro libovolná dvě různá prvočísla p, q větší než 2 platí nerovnost

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right| > \frac{4}{\sqrt{pq}}.$$

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 7. prosince 2010

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

60. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Předpokládejme, že číslo c má požadovanou vlastnost. Diferenci příslušné aritmetické posloupnosti označme d. Rozlišíme dva případy podle toho, zda číslo c leží mezi kořeny x_1 a x_2 dané kvadratické rovnice, nebo ne:

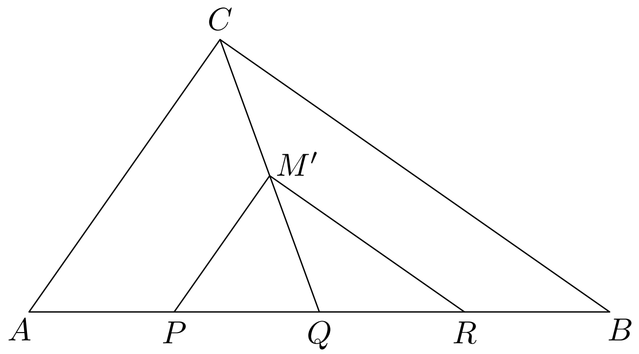
a) Je-li c prostředním členem předpokládané aritmetické posloupnosti, platí $x_1 = c - d$ a $x_2 = c + d$. Pro součet kořenů tak podle Viètova vztahu dostáváme $-\frac{5}{2} = x_1 + x_2 = 2c$, odkud $c = -\frac{5}{4}$. Navíc pro záporné c je diskriminant dané rovnice kladný, takže má dva reálné kořeny. (Pro $c = -\frac{5}{4}$ má daná rovnice kořeny $x_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{5}$.)

b) Je-li koeficient c krajním členem předpokládané aritmetické posloupnosti, označme kořeny dané rovnice tak, aby platilo $x_1 = c + d$, $x_2 = c + 2d$. Pro jejich součet tentokrát vychází $-\frac{5}{2} = x_1 + x_2 = 2c + 3d$. Vyjádříme-li odtud $d = -\frac{5}{6} - \frac{2}{3}c$ a dosadíme do vztahů $x_1 = c + d$ a $x_2 = c + 2d$, dostaneme $x_1 = \frac{1}{6}(2c - 5)$, $x_2 = -\frac{1}{3}(c + 5)$. Dosadíme-li oba výrazy do Viètova vztahu $x_1 x_2 = c$ pro součin kořenů, obdržíme po úpravě kvadratickou rovnici $2c^2 + 23c - 25 = 0$, která má kořeny 1 a $-\frac{25}{2}$. (Podmínku na diskriminant tentokrát ověřovat nemusíme, neboť uvedeným postupem máme zaručeno, že reálná čísla $x_{1,2}$ odpovídající oběma nalezeným hodnotám c splňují oba Viètovy vztahy, takže jsou skutečně kořeny příslušné rovnice. Pro $c = 1$ má daná kvadratická rovnice kořeny $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -2$; pro $c = -\frac{25}{2}$ má rovnice kořeny $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{5}{2}$.)

Závěr. Úloze vyhovují reálná čísla c z množiny $\{-\frac{25}{2}; -\frac{5}{4}; 1\}$.

Za úplné vyřešení úlohy udělte 6 bodů. Za nalezení každého ze tří řešení úlohy udělte po 2 bodech. Body přitom nestrhávejte, pokud soutěžící neurčí pro nalezené hodnoty koeficientu c kořeny příslušné kvadratické rovnice, neboť to úloha nepožaduje. Naopak strhněte jeden bod, pokud žák v případě a) nezmíní existenci reálných kořenů.

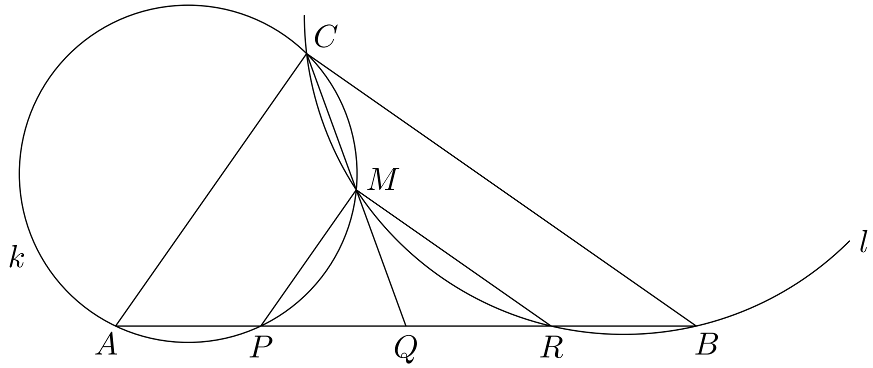
2. Označme M' střed úsečky CQ (obr. 1). Protože PM' a RM' jsou střední příčky trojúhelníků AQC a BQC, které jsou podle Thaletovy věty rovnoramenné se základnami AC a BC, jsou čtyřúhelníky $CAPM'$ a $CBRM'$ rovnoramenné lichoběžníky a jim opsané kružnice, jež se protínají v bodech C a M', jsou zároveň i opsanými kružnicemi uvažovaných trojúhelníků APC a BRC. Je tedy $M = M'$ a tvrzení úlohy je tím dokázáno.



Obr. 1

Jiné řešení. Označme c délku přepony AB daného pravoúhlého trojúhelníku ABC.

Kružnice opsané trojúhelníkům APC a BRC označme po řadě k, l (obr. 2). Vzhledem k tomu, že $|QP| \cdot |QA| = |QR| \cdot |QB| = \frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{2}c$, má střed Q přepony AB stejnou mocnost $m = \frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{2}c$ k oběma kružnicím k i l, a leží proto na jejich chordále CM. Navíc podle Thaletovy věty platí $|QC| = |QA| = \frac{1}{2}c$. Z rovnosti $|QM| \cdot |QC| = m$ tak plyne $|QM| = \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}|QC|$, takže M je středem úsečky CQ.



Obr. 2

Za úplné vyřešení úlohy udělte 6 bodů. Za částečná pozorování, která vedou k řešení úlohy, udělte nejvýše 3 body.

3. Protože p, q jsou různá *lichá* prvočísla, je $|p-q| \geqq 2$. Pro levou stranu dané nerovnosti tudíž platí

$$L = \left|\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right| = \left|\frac{p^2-q^2}{pq}\right| = \frac{|p-q| \cdot (p+q)}{pq} \geqq \frac{2\,(p+q)}{pq}.$$

Abychom dokázali požadovanou nerovnost

$$L > \frac{4}{\sqrt{pq}},$$

stačí dokázat nerovnost $p + q > 2\sqrt{pq}$. To je ovšem nerovnost, jež je triviálním důsledkem nerovnosti $(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 > 0$, která platí pro libovolná dvě různá kladná čísla p, q. Tím je daná nerovnost dokázána.

Za úplné vyřešení úlohy udělte 6 bodů, z toho 1 bod za provedení správné úpravy výrazu na levé straně nerovnosti, dále 2 body za využití podmínky $|p-q| \geqq 2$ a další 3 body za dokončení důkazu využitím uvedené „ostré“ nerovnosti či případně nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvojice různých kladných čísel p, q.