60. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=p$$

s neznámou x a reálným parametrem p.

2. Podél kružnice je rozmístěno 16 reálných čísel se součtem 7.

a) Dokažte, že existuje úsek pěti sousedních čísel se součtem aspoň 2.

b) Určete nejmenší k takové, že v popsané situaci lze vždy nalézt úsek k sousedních čísel se součtem aspoň 3.

3. Vně daného trojúhelníku ABC jsou sestrojeny čtverce $ACDE$, $BCGF$. Dokažte, že $|AG| = |BD|$. Dále ukažte, že středy obou čtverců spolu se středy úseček AB a DG jsou vrcholy čtverce.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

ve čtvrtek 20. ledna 2011

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Aby byla levá strana rovnice definována, musejí být oba výrazy pod odmocninami nezáporné, což je splněno právě pro všechna $x \geqq 0$. Pro nezáporná x je pak $p = \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \geqq \sqrt{3}$, rovnice může tedy mít řešení pouze pro $p \geqq \sqrt{3}$.

Nyní upravujme danou rovnici:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{x+3} &= p,\\
2x + 3 + 2\sqrt{x(x+3)} &= p^2,\\
2\sqrt{x(x+3)} &= p^2 - 2x - 3,\\
4x(x+3) &= (p^2 - 2x - 3)^2,\\
4x^2 + 12x &= p^4 + 4x^2 + 9 - 4p^2x - 6p^2 + 12x,\\
x &= \frac{(p^2-3)^2}{4p^2}.
\end{aligned}$$

Protože jsme danou rovnici umocňovali na druhou, je nutno se přesvědčit zkouškou, že vypočtené x je pro hodnotu parametru $p \geqq \sqrt{3}$ řešením původní rovnice:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2} + 3} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} &= \sqrt{\frac{p^4 - 6p^2 + 9 + 12p^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} =\\
&= \sqrt{\frac{(p^2+3)^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} = \frac{p^2+3}{2p} + \frac{p^2-3}{2p} = p
\end{aligned}$$

Při předposlední úpravě jsme využili podmínky $p \geqq \sqrt{3}$ (a tedy i $p^2 - 3 \geqq 0$ a $p > 0$), takže $\sqrt{(p^2-3)^2} = p^2 - 3$ a $\sqrt{4p^2} = 2p$.

Poznámka. Místo zkoušky stačí ověřit, že pro nalezené x jsou všechny umocňované výrazy nezáporné, tedy vlastně jen že

$$p^2 - 2x - 3 = \frac{(p^2-3)(p^2+3)}{2p^2} \geqq 0.$$

Pro $p \geqq \sqrt{3}$ tomu tak opravdu je.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za opomenutí zkoušky zkoušky strhněte jeden bod. Při neuvedení podmínky $p \geqq \sqrt{3}$ udělte 3 body (ať už zkouška je, či není — pokud je, tak je chybně).

2. a) Mezi 16 čísly napsanými podél kružnice se nachází právě 16 úseků pěti sousedních čísel (vybereme-li libovolně jedno z napsaných čísel a od něj označíme čísla podél kružnice postupně jako první, druhé, ..., šestnácté, bude první úsek tvořen prvním až pátým číslem, druhý úsek pak druhým až šestým číslem, ... a poslední šestnáctý úsek bude tvořen šestnáctým, prvním, druhým, třetím a čtvrtým číslem).

Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že uvažované tvrzení neplatí, tedy že čísla v každém z 16 úseků mají součet menší než 2. Celkový součet S_5 všech 16 součtů čísel v jednotlivých pěticích je tak menší než $16 \cdot 2 = 32$. Ovšem každé číslo na kružnici je součástí právě pěti úseků pěti sousedních čísel, tudíž každé z 16 čísel je v uvedeném součtu započteno právě pětkrát. Proto je součet S_5 zároveň roven pětinásobku součtu všech čísel na kružnici, což je 35. To je ve sporu s odvozenou nerovností $S_5 < 32$. Na kružnici tedy musí existovat pět po sobě jdoucích čísel, jejichž součet je alespoň 2 (dokonce více než 2).

b) Nejprve ukažme, že nemůže být $k \leqq 6$. K tomu stačí podél kružnice rozmístit 16 shodných čísel se součtem 7. Součet čísel v libovolném úseku k čísel tak bude

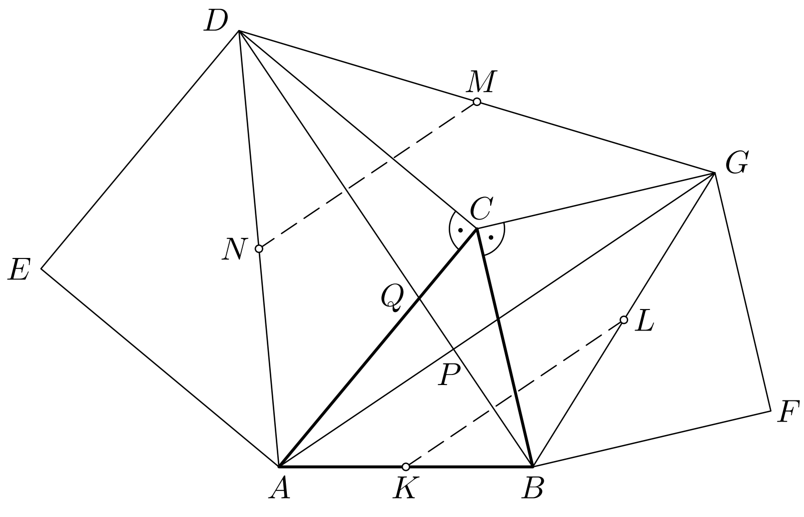
$$k \cdot \frac{7}{16} \leqq \frac{42}{16} < 3.$$

Nechť nyní $k = 7$. Zopakováním úvahy z části a) dokážeme, že vhodný úsek už existuje: Předpokládejme naopak, že součet libovolných sedmi po sobě jdoucích čísel (z daných šestnácti) je menší než tři. Takových úseků je podél kružnice šestnáct (jejich počet na čísle k nezávisí!), takže součet S_7 všech 16 součtů čísel v jednotlivých sedmicích je menší než $16 \cdot 3 = 48$. Každé z daných 16 čísel je v součtu S_7 započteno sedmkrát, tedy $S_7 = 7 \cdot 7 = 49$, což odporuje předchozímu odhadu $S_7 < 48$.

Hledaným číslem k je číslo 7.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz každé z částí a) a b) udělte po 3 bodech. Pokud v části b) chybí jen příklad, že $k \leqq 6$ nevyhovuje, strhněte 2 body.

3. Protože oba úhly BCG a DAC jsou pravé, uvažujme otočení kolem vrcholu C daného trojúhelníku, v němž bod B přejde do bodu G. V něm je zřejmě obrazem bodu D bod A a obrazem úsečky BD úsečka GA (obr. 1). Odtud plyne, že $|AG| = |BD|$, a také, že úsečky AG a BD jsou navzájem kolmé.



Obr. 1

Označme po řadě K, L, M, N středy stran čtyřúhelníku $ABGD$. (Body N a L jsou tedy středy uvažovaných čtverců.) Vzhledem k tomu, že úsečka KL je střední příčkou trojúhelníku AGB a úsečka MN střední příčkou trojúhelníku AGD, je $|KL| = \frac{1}{2}|AG| = |KL|$ a zároveň $MN \parallel AG \parallel KL$. Podobně $|KN| = \frac{1}{2}|BD| = |LM|$ a zároveň $KN \parallel BD \parallel LM$. To znamená, že $KLMN$ je rovnoběžník. Protože však víme, že $|AG| = |BD|$ a navíc $AG \perp BD$, je $KLMN$ čtverec. Tím jsou všechna tvrzení úlohy dokázána.

Jiné řešení. Úlohu vyřešíme bez úvahy o otočení. Pro důkaz rovnosti $|AG| = |BD|$ ukážeme, že trojúhelníky ACG a DCB jsou shodné podle věty sus. Skutečně, $|AC| = |DC|$, $|CG| = |CB|$ a $|\sphericalangle ACG| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCG| = |\sphericalangle ACB| + 90° = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle ACD| = = |\sphericalangle DCB|$.

Úsečky AG a BD jako strany shodných trojúhelníků tedy mají stejnou délku. Abychom ověřili, že jsou navíc navzájem kolmé, označíme P jejich průsečík a porovnáme vnitřní úhly v trojúhelnících APQ a DCQ, kde Q je průsečík úseček AC a BD. Při vrcholech A a D jsou úhly shodné díky ověřené shodnosti trojúhelníků ACG a DCB, úhly při vrcholu Q se rovněž shodují (jakožto úhly vrcholové), takže se shodují i jejich úhly při vrcholech P a C, jsou tedy oba pravé.

Z dokázané shodnosti i kolmosti úseček AG a BD odvodíme, že $KLMN$ je čtverec stejně jako v původním řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz shodnosti úseček AG a BD udělte 2 body, za důkaz jejich kolmosti další 2 body. Za dokončení důkazu rovněž 2 body.