60. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Součin kladných reálných čísel a, b, c je 60 a jejich součet je 15. Dokažte nerovnost

$$(a+b)(a+c) \geqq 60$$

a zjistěte, pro která taková čísla a, b, c nastane rovnost.

2. Najděte všechny dvojice kladných celých čísel a, b, pro něž je číslo b dělitelné číslem a a současně je číslo $3a+4$ dělitelné číslem $b+1$.

3. Nechť M, N jsou po řadě vnitřní body stran AB, BC rovnostranného trojúhelníku ABC, pro něž platí $|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = 2 : 1$. Označme P průsečík přímek AN a CM. Dokažte, že přímky BP a AN jsou navzájem kolmé.

4. Zapíšeme všechna pětimístná čísla, v nichž se každá z číslic 4, 5, 6, 7, 8 vyskytuje právě jednou. Pak jedno (libovolné z nich) škrtneme a všechna zbývající sečteme. Jaké jsou možné hodnoty ciferného součtu takového výsledku?

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 5. dubna 2011

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

60. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie B

1. Pomocí rovností $abc = 60$, $a+b+c = 15$ daný výraz $(a+b)(a+c)$ upravíme a pak odhadneme na základě AG-nerovnosti pro dvojici hodnot a a $4/a$:

$$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc = a^2 + (15-a)\cdot a + \frac{60}{a} =$$
$$= 15a + \frac{60}{a} = 15\Big(a + \frac{4}{a}\Big) \geqq 15 \cdot 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 60.$$

Nerovnost je dokázána. Rovnost nastane, právě když $a = 4/a$ neboli $a = 2$. Ze vztahů $b + c = 15 - a = 13$ a $bc = 60/a = 30$ máme $\{b, c\} = \{3, 10\}$. Rovnost proto splňují právě dvě vyhovující trojice (a, b, c), a to $(2, 3, 10)$ a $(2, 10, 3)$.

Jiné řešení. Kromě rovností $abc = 60$, $a + b + c = 15$ využijeme AG-nerovnost pro dvojici hodnot bc a $a(a + b + c)$:

$$(a+b)(a+c) = bc + a(a+b+c) \geqq 2 \cdot \sqrt{bc \cdot a(a+b+c)} = 2\sqrt{60 \cdot 15} = 60.$$

Rovnost nastane, právě když $bc = a(a+b+c)$ neboli $60/a = 15a$, odkud $a = 2$, takže závěr je stejný jako v prvním řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz nerovnosti udělte 4b. Za zjištění, kdy platí rovnost, pak další 2b.

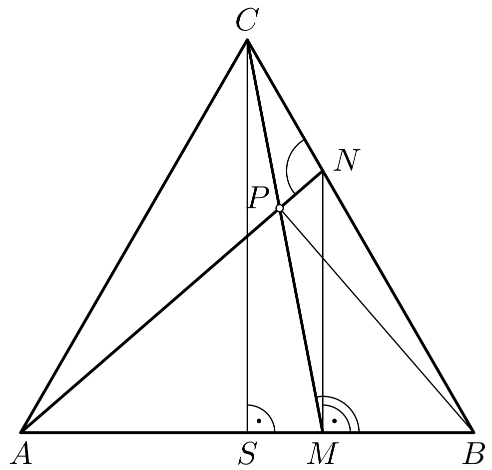
2. Protože číslo a dělí číslo b, lze psát $b = ka$, kde k je kladné celé číslo. Stačí tedy najít kladná celá čísla a, pro která existuje kladné celé číslo k takové, že číslo $3a+4$ je (kladným) násobkem čísla $ka + 1$ $(= b + 1)$. Z této podmínky dostáváme nerovnost $ka + 1 \leqq 3a + 4$, z níž plyne $k - 3 \leqq (k - 3)a \leqq 3$, a tedy $k \leqq 6$. Navíc pro $k \geqq 3$ je už $2(ka + 1) > 3a + 4$ pro libovolné $a \geqq 1$, takže může být jedině $ka+1 = 3a+4$. Probereme všech šest možností pro číslo k:

- $k = 1$: $a+1 \mid 3a+4$, a protože $a+1 \mid 3a+3$, muselo by platit $a+1 \mid 1$, což není možné, neboť $a + 1 > 1$.
- $k = 2$: $2a+1 \mid 3a+4 = (2a+1)+(a+3)$, tedy $2a+1 \mid a+3$. Protože však pro libovolné přirozené a platí $2\cdot(2a+1) > a+3$, musí být $2a+1 = a+3$ neboli $a = 2$ a odtud $b = ka = 4$.
- $k = 3$: $3a + 1 = 3a + 4$, což není možné.
- $k = 4$: $4a + 1 = 3a + 4$, tedy $a = 3$, $b = 12$.
- $k = 5$: $5a + 1 = 3a + 4$, což nesplňuje žádné celé a.
- $k = 6$: $6a + 1 = 3a + 4$, tedy $a = 1$, $b = 6$.

Řešením jsou dvojice $(1, 6)$, $(2, 4)$ a $(3, 12)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za pouhé uvedení všech dvojic vyhovujících zadání udělte 1b.

3. Ze zadání plyne, že $|BM| = |CN|$, $|AC| = |BC|$ a $|\sphericalangle ACN| = |\sphericalangle CBM| = 60°$, takže trojúhelníky ACN a CBM jsou shodné podle věty *sus*. Proto platí i $|\sphericalangle ANC| = |\sphericalangle CMB|$, takže čtyřúhelník $BNPM$ je tětivový (úhel ANC je doplňkovým úhlem k úhlu ANB, který je protějším úhlem k úhlu CMB ve zmíněném čtyřúhelníku, obr. 1).



Obr. 1

Označme S střed strany AB daného rovnostranného trojúhelníku ABC. Protože $|SB| = \frac{1}{2}|AB|$, je $|SB| : |MB| = 3 : 2$, a protože je i $|CB| : |NB| = 3 : 2$, jsou trojúhelníky SBC a MBN podobné podle věty *sus*. Protože úhel CSB je pravý, musí být pravý i úhel NMB. Kružnice opsaná čtyřúhelníku $BNPM$ je tak Thaletovou kružnicí nad průměrem BN, a tudíž je pravý i úhel BPN, což jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odvození faktu, že úhel BMN je pravý (podobnost trojúhelníků SBC a MBN) nebo za důkaz toho, že čtyřúhelník $BNPM$ je tětivový, udělte 2b. Za neúplné řešení (např. odvození obou předchozích tvrzení bez dokončení důkazu) však neudělujte více než 3b.

4. Výsledný ciferný součet je určen jednoznačně a je jím číslo 33.

Pro vyřešení úlohy bude výhodné nejprve zjistit součet S všech pětimístných čísel obsahujících každou z číslic 4, 5, 6, 7, 8. Těchto čísel je zřejmě právě tolik, kolik je různých pořadí uvedených pěti číslic, tedy $5! = 120$. Navíc každá z daných číslic se mezi těmito 120 čísly objevuje rovnoměrně v každém řádu, tedy 24krát. Součet S tak můžeme rozepsat po jednotlivých řádech jako

$$\begin{aligned} S = {}& 10^4 \cdot (24 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 8) + \\ &+ 10^3 \cdot (24 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 8) + \ldots = \\ &= 24 \cdot (4+5+6+7+8) \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 24 \cdot 30 \cdot 11\,111. \end{aligned}$$

Obraťme nyní pozornost k možným hodnotám ciferného součtu čísla $S - a$, kde a je pětimístné číslo zmíněného tvaru, tedy $a = 33\,333 + b$, přičemž b je pětimístné číslo obsahující každou z číslic 1, 2, 3, 4, 5. Je tedy

$$S - a = 11\,111 \cdot 24 \cdot 30 - a = 7\,999\,920 - 33\,333 - b = 7\,966\,587 - b.$$

Při odečítání čísla b však nedochází v jednotlivých řádech k přechodu přes desítku, proto je ciferný součet čísla $S - a$ roven $(7+9+6+6+5+8+7) - (1+2+3+4+5) = 48 - 15 = 33$ pro libovolné pětimístné číslo a obsahující každou z číslic 4, 5, 6, 7, 8.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.