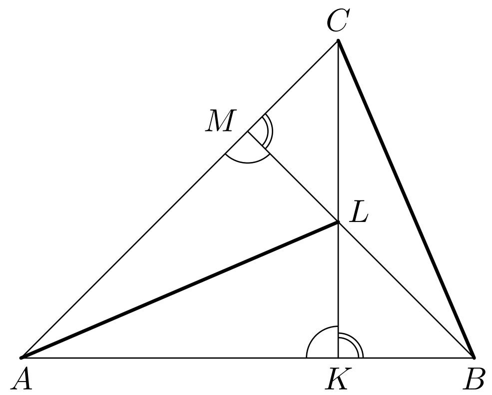
60. ročník matematické olympiády
III. kolo kategorie A

Brno, 27.–30. března 2011

1. *Určete velikosti vnitřních úhlů všech trojúhelníků ABC s vlastností: Uvnitř stran AB, AC existují po řadě body K, M, které s průsečíkem L přímek MB a KC tvoří tětivové čtyřúhelníky $AKLM$ a $KBCM$ se shodnými opsanými kružnicemi.*

(Jaroslav Švrček)

Řešení. Čtyřúhelník $KBCM$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle CMB| = |\sphericalangle CKB|$ neboli $|\sphericalangle AKL| = |\sphericalangle AML|$ (obr. 1). Přitom čtyřúhelník $AKLM$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle AKL| + |\sphericalangle AML| = 180°$. Ve zkoumaném případě proto musí být všechny čtyři zmíněné úhly pravé, K a M jsou tak paty výšek v trojúhelníku ABC, který je tudíž ostroúhlý, a bod L je průsečíkem jeho výšek. Kružnice opsaná čtyřúhelníku $KBCM$ je Thaletovou kružnicí nad průměrem BC a kružnice opsaná čtyřúhelníku $AKLM$ je Thaletovou kružnicí nad průměrem AL.



Obr. 1

Kružnice opsané uvedeným čtyřúhelníkům jsou shodné, právě když jsou shodné jejich průměry BC a AL. Označme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α, β, γ. Pravoúhlé trojúhelníky CKB a AKL jsou podobné, protože pro jejich úhly při odpovídajících vrcholech C a A platí $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle BCK| = 90° - \beta$. Zřejmě proto platí $|BC| = |AL|$, právě když $|AK| = |CK|$, tedy AKC je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

Vidíme, že trojúhelník ABC vyhovuje podmínkám úlohy, právě když je ostroúhlý s úhlem $\alpha = 45°$. Pro *ostré* úhly β a γ pak platí $\beta + \gamma = 135°$.

Závěr. Řešením jsou právě všechny trojice úhlů $(\alpha, \beta, \gamma) = (45°, 45° + \varphi, 90° - \varphi)$, kde $\varphi \in (0°, 45°)$.

2. *Určete všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí*

$$(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr.$$

(Jaromír Šimša)

Řešení. Ukážeme, že dané rovnici vyhovují právě tři trojice prvočísel (p, q, r), a to $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$.

Danou rovnici nejprve upravíme do tvaru

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{2}{q}\right)\left(1 + \frac{3}{r}\right) = 4.$$

Protože $3^3 < 4 \cdot 2^3$, musí být aspoň jeden ze tří činitelů na levé straně upravené rovnice větší než $\frac{3}{2}$. Pro prvočísla p, q, r tak nutně platí $p < 2$ nebo $q < 4$ nebo $r < 6$. Vzhledem k tomu, že neexistuje žádné prvočíslo menší než 2, zbývá vyšetřit následujících pět možností: $q \in \{2, 3\}$ a $r \in \{2, 3, 5\}$. Ty nyní rozebereme jednotlivě, přitom uvažovanou hodnotu q či r vždy dosadíme do dané rovnice, kterou pak (v oboru prvočísel) vyřešíme pro zbývající dvě neznámé.

▷ Pro $q = 2$ dostaneme $(p + 1)(r + 3) = 2pr$, odkud plyne $r = 3 + 6/(p - 1)$, což je celé číslo pouze pro prvočísla $p \in \{2, 3, 7\}$. Jim však odpovídají $r \in \{9, 6, 4\}$, která nejsou prvočísly.

▷ Pro $q = 3$ dostaneme $5(p + 1)(r + 3) = 12pr$, odkud plyne, že $p = 5$ nebo $r = 5$. Pro $p = 5$ dostaneme řešení $(5, 3, 3)$ a pro $r = 5$ řešení $(2, 3, 5)$.

▷ Pro $r = 2$ dostaneme $5(p+1)(q+2) = 8pq$, odkud plyne, že $p = 5$ nebo $q = 5$. Pro $p = 5$ nedostaneme žádné řešení v oboru prvočísel, zatímco pro $q = 5$ dostáváme třetí řešení dané rovnice, kterým je trojice $(7, 5, 2)$.

▷ Pro $r = 3$ dostaneme $(p + 1)(q + 2) = 2pq$, odkud $q = 2 + 4/(p - 1)$, což je celé číslo pouze pro prvočísla $p \in \{2, 3, 5\}$. Mezi odpovídajícími hodnotami $q \in \{6, 4, 3\}$ je jediné prvočíslo, pro něž dostáváme řešení $(p, q, r) = (5, 3, 3)$, které již známe.

▷ Pro $r = 5$ dostaneme $2(p+1)(q+2) = 5pq$, odkud plyne, že $p = 2$ nebo $q = 2$. Pro $p = 2$ dostáváme už známé řešení $(2, 3, 5)$, zatímco pro $q = 2$ vychází $p = 4$.

Jiné řešení. Pro každé prvočíslo q platí nerovnost $q + 2 \leqq 2q$. Pro prvočísla p a r tak dostaneme nerovnici $2(p+1)(r+3) \geqq 4pr$, kterou upravíme na tvar $(p - 1)(r - 3) \leqq$ $\leqq 6$. Protože $p - 1 \geqq 1$, musí být $r - 3 \leqq 6$ neboli $r \leqq 9$. Odtud plyne, že nutně $r \in$ $\in \{2, 3, 5, 7\}$. Postupným rozborem každé z těchto čtyř možností dospějeme (analogicky jako v předchozím řešení) ke třem trojicím prvočísel (p, q, r): $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$, které jsou jedinými řešeními úlohy.

---

3. *Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z vyhovují soustavě rovnic*

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokažte, že pak platí následující tvrzení:

a) Každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9, avšak nejvýše 25.

b) Některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 a jiné z nich je alespoň 5. (Jaromír Šimša)

Řešení. a) Dle zadání platí $(x + y)^2 = (12 - z)^2$ a $x^2 + y^2 = 54 - z^2$, tedy

$$2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = (12 - z)^2 - (54 - z^2) = 2\big((z - 6)^2 + 9\big) \tag{1}$$

a

$$0 \leqq (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 54 - z^2 - 2\big((z - 6)^2 + 9\big) = -3\big((z - 4)^2 - 4\big). \tag{2}$$

Z (1) plyne $xy = (z - 6)^2 + 9 \geqq 9$, z (2) nerovnost $(z - 4)^2 \leqq 4$ neboli $2 \leqq z \leqq 6$. Proto $(z - 6)^2 \leqq (2 - 6)^2 = 16$, což spolu s (1) dává $xy = (z - 6)^2 + 9 \leqq 25$. S ohledem na symetrii platí odvozené nerovnosti $9 \leqq xy \leqq 25$ i pro součiny yz, zx na místě xy.

b) Z dané soustavy rovnic dostáváme

$$xy + yz + zx = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \frac{12^2 - 54}{2} = 45.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}(x - 3)(y - 3) + (y - 3)(z - 3) + (z - 3)(x - 3) &= \\ = xy + yz + zx - 6(x + y + z) + 27 &= 45 - 6 \cdot 12 + 27 = 0.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že čísla $x-3$, $y-3$, $z-3$ nemohou být současně všechna kladná, alespoň jedno z čísel x, y, z je tedy nejvýše 3. Podobně ze vztahu

$$\begin{aligned}&(x-5)(y-5)+(y-5)(z-5)+(z-5)(x-5)=\\&\qquad=xy+yz+zx-10(x+y+z)+75=45-10\cdot 12+75=0\end{aligned}$$

vidíme, že čísla $x-5$, $y-5$, $z-5$ nemohou být současně všechna záporná, proto alespoň jedno z čísel x, y, z je nejméně 5.

Jiné řešení. Obtížnější obrat v části b) předchozího řešení můžeme nahradit důkazem implikací

$$(x>3)\wedge(y>3)\Rightarrow z<3 \qquad \text{a} \qquad (x<5)\wedge(y<5)\Rightarrow z>5.$$

Uvažujme kvadratický trojčlen $F(t)=(t-x)(t-y)$. Jsou-li oba jeho kořeny x a y větší než 3, platí $F(3)>0$. Ovšem podle zadání a (1) platí

$$0<F(3)=3^2-3(x+y)+xy=9-3(12-z)+(z-6)^2+9=(z-3)(z-6).$$

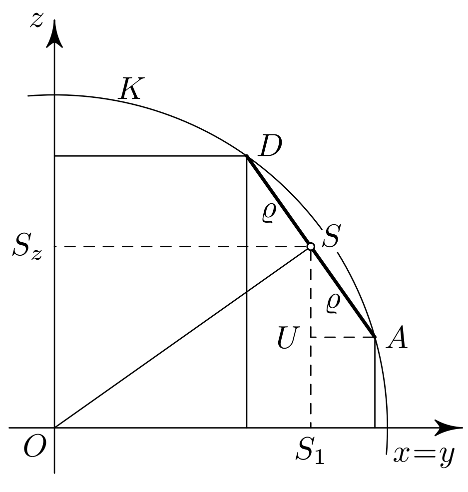
Z této nerovnosti a z odhadu $z\leqq 6$ dokázaného v části a) předchozího řešení tak dostáváme požadovaný odhad $z<3$. Podobně, jsou-li obě čísla x a y menší než 5, potom platí $F(5)>0$. Ovšem podle zadání a (1) platí

$$0<F(5)=5^2-5(x+y)+xy=25-5(12-z)+(z-6)^2+9=(z-2)(z-5).$$

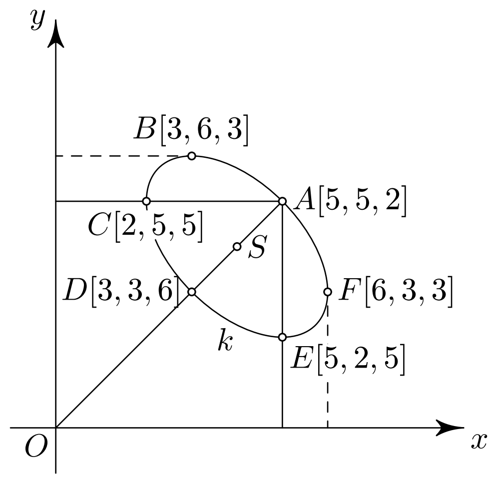
Z této nerovnosti a odhadu $z\geqq 2$ dokázaného v části a) předchozího řešení tak dostáváme požadovaný odhad $z>5$.

Jiné řešení. Vyřešíme část b) geometricky. V kartézské soustavě souřadnic s počátkem O a osami x, y, z určuje první rovnice rovinu σ, která prochází bodem $S=[4,4,4]$ a je kolmá k úsečce OS, zatímco druhá rovnice je rovnicí kulové plochy $K(O, r=\sqrt{54})$. Průnikem obou útvarů je kružnice $k(S,\varrho)$. Určíme nejprve její poloměr a průsečíky kružnice s rovinou, podle níž jsou osy x a y souměrně sdruženy.

Označme S_x, S_y a S_z kolmé průměty bodu S do souřadnicových os x, y a z. Na obr. 2 je řez rovinou OSS_z. Platí $|OS_1|=4\sqrt{2}$, $|OS|=4\sqrt{3}$ (stěnová a tělesová úhlopříčka krychle o hraně délky 4) a $|OA|=\sqrt{54}$. Z pravoúhlého trojúhelníku OAS pomocí Pythagorovy věty určíme $\varrho=|SA|=\sqrt{6}$ a z podobnosti trojúhelníků $SAU\sim OSS_1$ dostaneme $|US|=2$ a $|AU|=\sqrt{2}$. Odtud $A=[5,5,2]$ a (díky symetrii podle S) $D=[3,3,6]$.



Obr. 2



Obr. 3

Analogickým rozborem pro roviny OSS_y a OSS_x (nebo jen cyklickou záměnou, kterou lze vzhledem k symetrii uplatnit) nalezneme jejich průsečíky s kružnicí k:

$$B = [3, 6, 3], \quad E = [5, 2, 5] \quad \text{a} \quad C = [2, 5, 5], \quad F = [6, 3, 3].$$

Nalezené body A, B, C, D, E, F rozdělují kružnici k na šest oblouků (obr. 3 znázorňuje pohled na kružnici k ve směru osy z), pro jejichž body zřejmě platí:

$$\begin{aligned}
[x, y, z] \in \widehat{AB} &\Rightarrow 2 \leqq z \leqq 3,\ 5 \leqq y \leqq 6,\ 3 \leqq x \leqq 5,\\
[x, y, z] \in \widehat{BC} &\Rightarrow 2 \leqq x \leqq 3,\ 5 \leqq y \leqq 6,\ 3 \leqq z \leqq 5,\\
[x, y, z] \in \widehat{CD} &\Rightarrow 2 \leqq x \leqq 3,\ 5 \leqq z \leqq 6,\ 3 \leqq y \leqq 5,\\
[x, y, z] \in \widehat{DE} &\Rightarrow 2 \leqq y \leqq 3,\ 5 \leqq z \leqq 6,\ 3 \leqq x \leqq 5,\\
[x, y, z] \in \widehat{EF} &\Rightarrow 2 \leqq y \leqq 3,\ 5 \leqq x \leqq 6,\ 3 \leqq z \leqq 5,\\
[x, y, z] \in \widehat{FA} &\Rightarrow 2 \leqq z \leqq 3,\ 5 \leqq x \leqq 6,\ 3 \leqq y \leqq 5.
\end{aligned}$$

Tím je ovšem tvrzení b) dokázáno.

---

4. *Uvažujme kvadratický trojčlen ax^2+bx+c s reálnými koeficienty $a \geqq 2$, $b \geqq 2$, $c \geqq 2$. Adam a Boris hrají následující hru: Je-li na tahu Adam, vybere jeden z koeficientů trojčlenu a nahradí ho* součtem *zbylých dvou. Pokud je na tahu Boris, vybere jeden z koeficientů a nahradí ho* součinem *zbylých dvou. Adam začíná a hráči se pravidelně střídají. Hru vyhrává ten, po jehož tahu má vzniklý trojčlen dva různé reálné kořeny. Určete, který z hráčů má vítěznou strategii v závislosti na koeficientech a, b, c počátečního trojčlenu.* (Michal Rolínek)

Řešení. Pokud Adam nahradí koeficient u lineárního členu, získá trojčlen $ax^2 + (a + c)x + c$, který má dva různé reálné kořeny, právě když je jeho diskriminant $(a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2$ kladný. To nastane, právě když $a \neq c$. V tomto případě výše popsaným tahem vítězí Adam. Pokud Adam nahradí koeficient u absolutního členu, získá trojčlen $ax^2 + bx + (a + b)$ se dvěma různými reálnými kořeny, právě když je jeho diskriminant $b^2 - 4a(a+b) = \big(b(1 + \sqrt{2}) + 2a\big)\big(b(\sqrt{2} - 1) - 2a\big)$ kladný. Vzhledem k podmínkám úlohy to nastane, právě když $b(\sqrt{2}-1) > 2a$. Jelikož diskriminant kvadratického trojčlenu je symetrická funkce koeficientů u kvadratického a absolutního členu, nastane stejná situace i v případě, kdy Adam nahradí koeficient u kvadratického členu.

Shrňme úvahy z předchozího odstavce. Pokud $a \neq c$ nebo $b > \frac{2}{\sqrt{2}-1}a = 2(\sqrt{2}+1)a$, může Adam prvním tahem vyhrát.

Předpokládejme, že $a = c$ a současně $b \leqq 2(\sqrt{2}+1)a$. Po Adamovi je na tahu Boris, který bude nahrazovat koeficienty u jednoho z trojčlenů

a) $ax^2 + bx + (a + b)$ nebo $(a + b)x^2 + bx + a$, b) $ax^2 + 2ax + a$.

a) Pokud v tomto případě nahradí Boris koeficient u lineárního členu, dostane jeden z trojčlenů $ax^2+a(a+b)x+(a+b)$ nebo $(a+b)x^2+a(a+b)x+a$, jež mají oba diskriminant $a^2(a + b)^2 - 4a(a + b) = a(a + b)\,(a(a + b) - 4)$, který je vzhledem k podmínkám $a \geqq 2$, $b \geqq 2$ kladný. Proto Boris tímto tahem zvítězí.

b) Pokud Boris nahradí koeficient u lineárního členu, dostane kvadratický trojčlen $ax^2 + a^2x + a$, který má dva reálné kořeny, právě když je jeho diskriminant $a^4 - 4a^2 = a^2(a+2)(a-2)$ kladný. Vzhledem k podmínkám úlohy to nastane, právě když $a > 2$. Kdyby Boris v případě $a = 2$ nahradil koeficient u kvadratického nebo absolutního členu, zanechal by Adamovi jeden z trojčlenů $8x^2 + 4x + 2$ nebo $2x^2 + 4x + 8$. Z úvah v prvním odstavci plyne, že v takovém případě by zvítězil Adam. Proto v případě $a = 2$

musí Boris, aby neprohrál, nahradit koeficient u lineárního členu, a zanechá tak Adamovi trojčlen $2x^2 + 4x + 2$.

Z odstavců a) a b) plyne: Pokud Adam nemůže zvítězit prvním tahem, může svým tahem zvítězit Boris, právě když $a \neq 2$. V případě $a = 2$ svým prvním tahem Boris neprohraje, jen když zanechá soupeři trojčlen $2x^2 + 4x + 2$.

Zatím tedy neznáme vítěznou strategii některého z hráčů, pokud po prvním Borisově tahu zůstane trojčlen $2x^2 + 4x + 2$. Z úvah v prvním odstavci vyplývá, že Adam neprohraje, pokud nahradí koeficient u lineárního členu, takže zanechá soupeři stejný trojčlen. Na tento trojčlen musí Boris, aby neprohrál, reagovat náhradou koeficientu u lineárního členu, tudíž i on zanechá stejný trojčlen a hra v tomto případě nemá při správné hře obou hráčů vítěze.

Závěr. Pro trojčlen $ax^2 + bx + c$ platí:

▷ Pokud $a \neq c$ nebo $b > 2(\sqrt{2} + 1)a$, má vítěznou strategii Adam a může prvním tahem vyhrát.

▷ Pokud $a = c > 2$ a $b \leqq 2(\sqrt{2} + 1)a$, má vítěznou strategii Boris a může prvním tahem vyhrát.

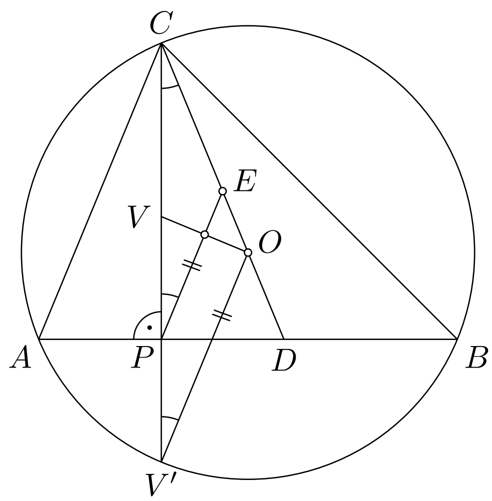
▷ Pokud $a = c = 2$ a $b \leqq 2(\sqrt{2}+1)a$, musejí oba hráči, aby neprohráli, v každém tahu zanechávat trojčlen $2x^2 + 4x + 2$. V tomto případě žádný z hráčů nemá vítěznou strategii.

---

5. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB, V průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD. Dokažte, že přímka EP prochází středem úsečky OV.* (Karel Horák)

Řešení. Je-li trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB, leží celá úsečka OV na přímce EP a tvrzení platí triviálně. Můžeme tedy předpokládat, že $|AC| \neq |BC|$, takže přímky CV, CO jsou různé.

Jak známo, bod V' souměrně sdružený s průsečíkem výšek V podle strany AB uvažovaného trojúhelníku ABC leží na kružnici tomuto trojúhelníku opsané, proto je bod P středem úsečky VV' (obr. 4). Trojúhelník $CV'O$ je rovnoramenný s hlavním



Obr. 4

vrcholem O, a protože střed E úsečky CD je současně středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku CPD s přeponou CD, je i trojúhelník CPE rovnoramenný. Oba rovnoramenné trojúhelníky $CV'O$ a CPE jsou přitom stejnolehlé (se středem stejnolehlosti v bodě C) — shodují se totiž ve společném úhlu při základně a body C, P, V' leží v přímce stejně jako body C, E, O. Je tudíž $PE \parallel V'O$.

Protože P je středem strany VV' trojúhelníku $V'OV$, leží na přímce PE střední příčka tohoto trojúhelníku, která je rovnoběžná s jeho stranou $V'O$. Přímka PE tedy protíná úsečku OV v jejím středu, což jsme chtěli dokázat.

---

6. *Označme $\mathbb{R}^+$ množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí*

$$f(x)\,f(y) = f(y)\,f\bigl(x\,f(y)\bigr) + \frac{1}{xy}.$$

(Pavel Calábek)

Řešení. Ukážeme, že jediná funkce f, která splňuje podmínky úlohy, je

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Ze zadání plyne, že $f(y) \neq 0$ pro libovolné $y > 0$, tudíž

$$f\bigl(x\,f(y)\bigr) = f(x) - \frac{1}{xy\,f(y)}. \tag{1}$$

Označme $f(1) = a > 0$. Volbou $x = 1$, resp. $y = 1$ v rovnici (1) postupně dostaneme

$$f\bigl(f(y)\bigr) = f(1) - \frac{1}{y\,f(y)} = a - \frac{1}{y\,f(y)} \qquad (y \in \mathbb{R}^+) \tag{2}$$

$$f(ax) = f(x) - \frac{1}{ax} \qquad (x \in \mathbb{R}^+). \tag{3}$$

Volbou $x = 1$ v rovnici (3) obdržíme

$$f(a) = f(1) - \frac{1}{a} = a - \frac{1}{a}. \tag{4}$$

Volbou $x = a$ v rovnici (1) a užitím (4) dostaneme

$$f\bigl(a\,f(y)\bigr) = f(a) - \frac{1}{ay\,f(y)} = a - \frac{1}{a} - \frac{1}{ay\,f(y)} \qquad (y \in \mathbb{R}^+),$$

zatímco pomocí vztahů (3) a (2) můžeme levou stranu předchozí rovnice upravit na tvar

$$f\bigl(a\,f(y)\bigr) = f\bigl(f(y)\bigr) - \frac{1}{a\,f(y)} = a - \frac{1}{y\,f(y)} - \frac{1}{a\,f(y)}.$$

Porovnáním pravých stran předchozích dvou rovnic vypočítáme

$$f(y) = 1 + \frac{a-1}{y} \qquad (y \in \mathbb{R}^+). \tag{4}$$

Pokud tedy existuje řešení dané rovnice, musí mít tvar (4). Dosazením do rovnice v zadání a následnou úpravou zjistíme, že pro všechna kladná reálná x a y má platit $(a-1)^2 = 1$. Vzhledem k předpokladu $a > 0$ je tato rovnice splněna, právě když $a = 2$. Tímto krokem jsme zároveň provedli zkoušku správnosti nalezeného řešení.