52. Mezinárodní matematická olympiáda

Martin Panák, MU Brno

Padesátý druhý ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 12. do 24. července 2011 v Nizozemí. Olympiády se zúčastnilo 564 soutěžících ze 101 zemí.

České družstvo tvořili tito soutěžící: *Michael Bílý* z Gymnázia Jaroslava Vrchlického v Klatovech, *Miroslav Koblížek* z Gymnázia Žamberk, *Dung Anh Le* z Gymnázia Tachov, *Daniel Šafka* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Štěpán Šimsa* z Gymnázia Josefa Jungmana v Litoměřicích a *Tomáš Zeman* z Gymnázia Jana Keplera v Praze. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl *dr. Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *dr. Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Organizace celého průběhu olympiády byla na velmi vysoké úrovni. Ostatně Nizozemí je známo tím, že se zde vše důkladně plánuje. To je dáno i tím, že zhruba třetina území této země leží pod hladinou moře.

Olympiáda začala tradičně zasedáním mezinárodní jury, složené z vedoucích národních delegací. Jedním z úkolů jury je vybrat šest soutěžních úloh z problémů, které poslaly jednotlivé státy. Jury má rovněž na starosti případné změny regulí olympiády, jednání o budoucích dějištích a v neposlední řadě pak vedoucí jednotlivých delegací překládají zadání vybraných úloh do národních jazyků (celé jednání jury se vede v angličtině). Poznamenejme, že jako dějiště následujících mezinárodních olympiád byla schváleny tyto země: 2013 – Kolumbie; 2014 – Jižní Afrika; 2015 – Thajsko (jednalo se vždy o jediné kandidáty na pořádání). Jednání se odehrávala v areálu bývalého kláštera, nedaleko Eindhovenu. Místní univerzita, Technická univerzita Eindhoven, byla jedním z organizátorů a sponzorů celé akce.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí přijeli do Amsterdamu v sobotu 16. července a byli ubytováni v hotelu Novotel, jižně od centra města. V neděli 17. července bylo na programu slavnostní zahájení v kongresovém centru RAI, což je jedno z největších konferenčních zařízení v celém Nizozemí. Tohoto zahájení se zúčastnili i vedoucí delegací, kteří sem byli převezeni pouze na něj. Na zahájení se na pódiu krátce představily všechny výpravy, doprovázené taneční skupinou ISH. Součástí byl i videopozdrav nizozemské ministryně vzdělávání, kultury a vědy *Janneke Marlene van Bijsterveldtové-Vilegenthartové.*

Ve dnech 18. a 19. července proběhla vlastní soutěž, která jako vždy probíhala ve dvou dnech, přičemž každý den soutěžící řešili během čtyř a půl hodiny tři příklady. V první půlhodině po zadání úloh se mohou soutěžící ptát na otázky k úlohám. Tyto jsou poté elektronicky odeslány do místa, kde zasedá jury. Vedoucí družstva, jehož žák položí dotaz (v rodném jazyce), přeloží dotaz pro celou jury, navrhne odpověď a ta je pak schválena, či upravena a odeslána zpět žákovi. Druhý soutěžní den se sešlo 189 otázek, zejména ke čtvrté úloze, jejíž znění nebylo v některých jazycích zcela srozumitelné. Zodpovídání těchto dotazů zabralo přes dvě hodiny. Následně byly vedoucí delegací definitivně přesunuti do Amsterdamu, do stejného hotelu jako pedagogičtí vedoucí a soutěžící.

V dalších dnech pobytu byly pro soutěžící připraveny nejrůznější exkurze (výlet na kolech – typické pro Nizozemí, plavba na jachtě, návštěva pláže). Vedoucí se pak věnovali opravám úloh svých žáků. Tyto jsou po soutěži zkopírovány a nezávisle opraveny též koordinátory, což jsou zkušení matematici z celého světa, které zajišťuje pořádající země (v tomto roce bylo přítomno téměř 80 koordinátorů). Po opravách se vedoucí a koordinátoři sejdou, porovnají bodová ohodnocení, která udělili, a snaží se dospět ke shodě. Celý proces oprav trvá tři dny.

Slavnostní zakončení olympiády se konalo opět v centru RAI (v „ráji“ jak říkali čeští a slovenští účastníci). Předávání medailí se z významných osobností zúčastnil i předseda organizačního výboru *Robbert Dijkgraaf*, přední světový matematik a také Holanďan. Také při zakončení všechno pěkně klapalo, projevy byly krátké a výstižné, nikdo se nenudil. Na závěr byla předána vlajka IMO pořadatelům olympiády v příštím roce. Tato se uskuteční v Argentině, v městě Mar del Plata.

Co se týče výsledků českého družstva, tak tým splnil nelehký úkol získat přesně tolik bodů, kolik bylo zúčastněných zemí. Tento jedinečný výkon nás zařadil na 39.místo v hodnocení zemí, pět míst za Slovensko (v porovnání s loňským rokem jsme si polepšili o 17 bodů a 9 míst). Žádný z českých účastníků neodjížděl s prázdnou: Anh Dung Le získal stříbrnou medaili, Štěpán Šimsa, Michael Bílý a Tomáš Zeman medaili bronzovou a konečně Miroslav Koblížek a Daniel Šafka čestné uznání za bezchybné vyřešení alespoň jedné úlohy. Nutno podotknout, že Miroslavu Koblížkovi unikla o jediný bod bronzová medaile a Štěpánu Šimsovi pak o bod medaile stříbrná.

Absolutní vítězkou olympiády se stala s největším možným bodovým ziskem Lisa Sauermannová z Německa, která se tak stala nejúspěšnější účastnicí olympiád všech dob (celkem získala čtyři zlaté a jednu stříbrnou medaili). Dívky tvořily 11% účastníků, což je na matematickou olympiádu vysoké číslo. Nejúspěšnější zemí se pak již tradičně stala Čína, i když druhé Spojené státy americké jí šlapaly na paty. Překvapením je pak třetí místo Singapuru.

V následujícím přehledu můžete zjistit celkové absolutní pořadí jednotlivých účastníků českého a slovenského družstva:

Pořadí	**Jméno**	**Body za úlohu číslo**							**Cena**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
83.	Anh Dungh Le	5	0	7	7	4	0	23	S
145.	Štěpán Šimsa	7	0	0	7	7	0	21	B
202.	Michael Bílý	7	1	0	6	4	0	18	B
253.	Tomáš Zeman	7	0	0	7	2	0	16	B
282.	Miroslav Koblížek	7	0	0	7	1	0	15	HM
403.	Daniel Šafka	7	0	0	1	0	0	7	HM
	Celkem	40	1	7	35	18	0	101	
74.	Ondrej Kováč	7	4	0	6	7	0	24	S
113.	Martin Vodička	7	1	0	7	7	0	22	S
186.	Matúš Stehlík	7	0	0	7	5	0	19	B
222.	Natálie Karásková	7	0	0	7	2	1	17	B
253.	Michal Tóth	7	1	0	7	1	0	16	B
316.	Marián Horňák	3	1	0	7	2	0	13	HM
	Celkem	38	7	0	41	24	1	111	

Pro úplnost uvádíme tabulku pořadí zemí podle počtu dosažených bodů společně s počty medailí, které získali (čísla v závorce za názvem země značí počet reprezentantů, pokud byl nižší než šest):

	Země	**Medaile**			**b.**
		G	S	B	
1.	ČLR	6	0	0	189
2.	USA	6	0	0	184
3.	Singapur	4	1	1	179
4.	Rusko	2	4	0	161
5.	Thajsko	3	2	1	160
6.	Turecko	3	2	1	159
7.	KLDR	3	3	0	157
8.–9.	Rumunsko	1	5	0	154
	Tchaj-wan	2	4	0	154
10.	Írán	2	4	0	151
11.	Německo	1	3	2	150
12.	Japonsko	2	2	2	147
13.	Korea	2	3	0	144
14.	Hongkong	2	1	3	138
15.–16.	Ukrajina	1	2	3	136
	Polsko	2	2	1	136
17.–18.	Kanada	1	2	3	132
	Velká Británie	2	1	2	132
19.	Itálie	1	3	1	129
20.–21.	Brazílie	0	3	3	121
	Bulharsko	0	2	3	121
22.	Mexiko	0	2	4	120
23.–24.	Indie	1	1	2	119
	Izrael	1	0	4	119
25.–27.	Austrálie	0	3	3	116
	Maďarsko	0	2	3	116
	Srbsko	1	2	1	116
28.	Nizozemsko	0	2	3	115
29.–30.	Indonésie	0	2	4	114
	Nový Zéland	0	2	2	114
31.–33.	Belgie	0	2	3	113
	Peru	1	0	2	113
	Vietnam	0	0	6	113
34.–35.	Francie	0	1	4	111
	Slovensko	0	2	3	111
36.–37.	Chorvatsko	0	1	5	110
	Rakousko	0	2	2	110
38.	Kazachstán	0	1	3	105
39.	*Česká republika*	0	1	3	101
40.	Řecko	1	0	3	99
41.–42.	JAR	0	1	2	93
	Malajsie	1	1	1	93
43.–44.	Bolívie	0	0	4	88
	Švýcarsko	0	2	1	88
45.	Litva	0	0	4	87
46.–47.	Moldavsko	0	1	0	86
	Portugalsko	1	0	2	86
48.	Španělsko	0	0	3	83
49.	Argentina	1	0	0	77
50.–51.	Dánsko	0	1	1	76
	Estonsko	0	0	2	76
52.	Kolumbie	0	0	1	73
53.	Makao	0	0	2	71
54.–56.	Filipíny (5)	0	0	3	69
	Mongolsko	0	0	2	69
	Švédsko	0	1	0	69
57.–60.	Finsko	0	1	0	68
	Gruzie	0	0	2	68
	Lotyšsko	0	1	1	68
	Tádžikistán	0	1	0	68
61.	Norsko	0	1	0	67
62.–65.	Bělorusko	0	0	1	64
	Maroko	0	1	1	64
	Slovinsko	0	0	1	64
	Turkmenistán	0	0	3	64
66.	Uzbekistán (5)	0	0	1	62
67.–68.	Arménie (5)	0	1	0	61
	Ázerbájdžán	0	1	1	61
69.	Kostarika (4)	0	1	0	57
70.	Saudská Arábie	0	0	2	53
71.	Kypr	0	0	1	51
72.	Bangladéš	0	0	1	50
73.	Srí Lanka	0	0	1	49
74.–76.	Chile	0	0	1	48
	Island	0	0	0	48
	Lucembursko	0	0	1	48
77.	Tunisko	0	0	1	46
78.	Nigérie	0	0	1	40
79.–80.	Makedonie	0	0	1	38
	Paraguay (5)	0	0	0	38
81.	Pákistán (4)	0	0	1	35
82.	Pobřeží slonoviny	0	0	0	34
83.–84.	Ekvádor	0	0	1	32
	Portoriko (4)	0	0	0	32
85.–86.	Trinidad a Tobago	0	0	0	29
	Uruguay (4)	0	0	0	29
87.	Irsko	0	0	0	26
88.	Albánie	0	0	0	24
89.	Kosovo	0	0	0	22
90.–91.	Honduras (3)	0	0	0	21
	Venezuela (2)	0	0	0	21
92.	Bosna a Hercegovina (4)	0	0	0	17
93.–94.	Kyrgyzstán (5)	0	0	0	14
	Sýrie	0	0	0	14
95.	Černá hora (4)	0	0	0	13
96.	Salvádor (2)	0	0	0	11
97.	Guatemala (4)	0	0	0	8
98.	Panama (1)	0	0	0	6
99.	Lichtenštejnsko (1)	0	0	0	4
100.–101.	Kuvajt (5)	0	0	0	1
	Spojené arab. emiráty (5)	0	0	0	1

A na závěr soutěžní úlohy:

1. soutěžní den (18. 7. 2011)

1. Pro libovolnou množinu $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ čtyř (po dvou různých) celých kladných čísel označme s_A součet $a_1+a_2+a_3+a_4$. Dále nechť n_A značí počet dvojic (i, j), kde $1 \le i < j \le 4$ a a_i+a_j dělí s_A. Určete všechny čtyřprvkové množiny A celých kladných čísel, pro které je hodnota n_A největší možná.

2. Nechť $\mathcal{S}$ je množina alespoň dvou bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na přímce. *Větrným mlýnem* rozumíme následující proces. Na počátku je vybrána nějaká přímka ℓ procházející právě jedním bodem $P \in \mathcal{S}$. Tato přímka se začne otáčet ve směru hodinových ručiček se *středem otáčení* P dokud „nenarazí" na další bod množiny $\mathcal{S}$, označme jej Q. Přímka se nadále otáčí ve směru hodinových ručiček, ovšem se středem otáčení Q, dokud nenarazí na další bod množiny $\mathcal{S}$, a tak dále. Tento proces neustále pokračuje (nekonečně dlouho). Dokažte, že lze zvolit bod $P \in \mathcal{S}$ a přímku ℓ, procházející bodem P, tak, že jimi začínající větrný mlýn bude mít za střed otáčení každý bod z $\mathcal{S}$ nekonečněkrát.

3. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel splňující nerovnost

$$f(x + y) \le yf(x) + f(f(x))$$

pro všechna reálná x a y. Dokažte, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \le 0$.

2. soutěžní den (19. 7. 2011)

4. Nechť n je celé kladné číslo. Máme dány rovnoramenné váhy a n závaží o hmotnostech 2^0, 2^1, …, 2^{n-1}. V n krocích máme na váhy postupně po jednom umístit všechna závaží. Každý z kroků spočívá ve výběru jednoho ze závaží, které ještě není na vahách, a jeho umístění buď na levou, nebo na pravou misku vah, ale vždy tak, aby obsah pravé misky nebyl nikdy těžší než obsah levé. Kolik různých posloupností takovýchto n kroků existuje?

5. Nechť f je funkce z množiny celých čísel do množiny celých kladných čísel taková, že pro libovolná celá m a n je rozdíl $f(m) - f(n)$ dělitelný číslem $f(m - n)$. Dokažte, že pro libovolná celá m a n taková, že $f(m) \le f(n)$, je číslo $f(n)$ dělitelné číslem $f(m)$.

6. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník a Γ kružnice jemu opsaná. Dále nechť ℓ je tečna kružnice Γ a ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c jsou po řadě obrazy přímky ℓ v osové symetrii podle přímek BC, CA, AB. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku určenému přímkami ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c se dotýká kružnice Γ.