ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI 1. KOLA 61. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL (2011/2012)

Kategorie A

1. Označme n součet všech desetimístných čísel, která mají ve svém dekadickém zápise každou z číslic $0, 1, \dots, 9$. Zjistěte zbytek po dělení čísla n sedmdesáti sedmi.

(*Pavel Novotný*)

2. Na setkání bylo několik lidí. Každí dva, kteří se neznali, měli mezi ostatními přítomnými právě dva společné známé. Účastníci A a B se znali, ale neměli ani jednoho společného známého. Dokažte, že A i B měli mezi přítomnými stejný počet známých. Ukažte rovněž, že na setkání mohlo být právě šest osob. (*Vojtech Bálint*)

3. Označme S střed kružnice vepsané, T těžiště a V průsečík výšek daného rovnoramenného trojúhelníku, který není rovnostranný.

a) Dokažte, že bod S je vnitřním bodem úsečky TV.

b) Určete poměr délek stran daného trojúhelníku, je-li bod S středem úsečky TV.

(*Jaromír Šimša*)

4. Nechť p, q jsou dvě různá prvočísla, m, n přirozená čísla a součet

$$\frac{mp-1}{q} + \frac{nq-1}{p}$$

je celé číslo. Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{m}{q} + \frac{n}{p} > 1.$$

(*Jaromír Šimša*)

5. Jsou dány dvě shodné kružnice k_1, k_2 o poloměru rovném vzdálenosti jejich středů. Jejich průsečíky označme A a B. Na kružnici k_2 zvolme bod C tak, že úsečka BC protne kružnici k_1 v bodě různém od B, který označíme L. Přímka AC protne kružnici k_1 v bodě různém od A, který označíme K. Dokažte, že přímka, na níž leží těžnice z vrcholu C trojúhelníku KLC, prochází pevným bodem nezávislým na poloze bodu C.

(*Tomáš Jurík*)

6. Najděte největší reálné číslo k takové, že nerovnost

$$\frac{2(a^2+kab+b^2)}{(k+2)(a+b)} \geqq \sqrt{ab}$$

platí pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b. (*Ján Mazák*)

61. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

Kategorie B

1. Mezi všemi desetimístnými čísly dělitelnými jedenácti, v nichž se žádná číslice neopakuje, najděte nejmenší a největší. (*Jaroslav Zhouf*)

2. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, jehož obsah označme P. Nechť F je pata výšky z vrcholu C na přeponu AB. Na kolmicích k přímce AB, které procházejí vrcholy A a B, v polorovině opačné k polorovině ABC uvažujme po řadě body D a E, pro něž platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Obsah trojúhelníku DEF označme Q. Dokažte, že platí $P \geqq Q$, a zjistěte, kdy nastane rovnost. (*Jaroslav Švrček*)

3. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, které vyhovují soustavě rovnic

$$x \cdot \lfloor y \rfloor = 7,$$
$$y \cdot \lfloor x \rfloor = 8.$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ značí *dolní celou část* čísla a, tj. největší celé číslo, které nepřevyšuje a.) (*Pavel Novotný*)

4. Jsou dány dvě různoběžky a, c procházející bodem P a bod B, který na nich neleží. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$ s vrcholy A, C a D po řadě na přímkách a, c a PB. (*Jaromír Šimša*)

5. V jistém městě mají vybudovanou síť na šíření pomluv, v níž si každý pomlouvač vyměňuje informace se třemi pomlouvačkami a každá pomlouvačka si vyměňuje informace se třemi pomlouvači. Jinak se pomluvy nešíří.

a) Dokažte, že pomlouvačů a pomlouvaček je stejný počet.

b) Předpokládejme, že síť na pomlouvání je souvislá (pomluvy od libovolného pomlouvače a libovolné pomlouvačky se mohou dostat ke všem ostatním). Dokažte, že i když jeden pomlouvač zemře, zůstane síť souvislá. (*Ján Mazák*)

6. Anna a Bedřich hrají karetní hru. Každý z nich má pět karet s hodnotami 1 až 5 (od každé jednu). V každém z pěti kol oba vyloží jednu kartu a kdo má vyšší číslo, získá bod. V případě karet se stejnými čísly nezíská bod nikdo. Použité karty se do hry nevracejí. Kdo získá na konci více bodů, vyhrál. Kolik procent ze všech možných průběhů takové hry skončí výhrou Anny? (*Tomáš Jurík*)

61. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

Kategorie C

1. Najděte všechny trojčleny $p(x) = ax^2 + bx + c$, které dávají při dělení dvojčlenem $x + 1$ zbytek 2, při dělení dvojčlenem $x + 2$ zbytek 1, přičemž $p(1) = 61$. (*Jaromír Šimša*)

2. Délky stran trojúhelníku jsou v metrech vyjádřeny celými čísly. Určete je, má-li trojúhelník obvod 72 m a je-li nejdelší strana trojúhelníku rozdělena bodem dotyku vepsané kružnice v poměru 3 : 4. (*Pavel Leischner*)

3. Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c, pro něž platí množinová rovnost

$$\big\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\big\} = \{2,3,5,60,90,180\},$$

kde (x,y) a $[x,y]$ značí po řadě největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel x a y. (*Tomáš Jurík*)

4. Reálná čísla a, b, c, d vyhovují rovnici $ab + bc + cd + da = 16$.
a) Dokažte, že mezi čísly a, b, c, d se najdou dvě se součtem nejvýše 4.
b) Jakou nejmenší hodnotu může mít součet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$? (*Ján Mazák*)

5. Je dán rovnoramenný trojúhelník se základnou délky a a rameny délky b. Pomocí nich vyjádřete poloměr R kružnice opsané a poloměr r kružnice vepsané tomuto trojúhelníku. Pak ukažte, že platí $R \geqq 2r$, a zjistěte, kdy nastane rovnost. (*Leo Boček*)

6. Na hrací desce $n \times n$ tvořené bílými čtvercovými poli se Markéta a Tereza střídají v tazích jedním kamenem při následující hře. Nejprve Markéta umístí kámen na libovolné pole a toto pole obarví modře. Dále vždy hráčka, která je na tahu, provede s kamenem *skok* na pole, které je dosud bílé, a toto pole obarví modře. Přitom *skokem* rozumíme obvyklý tah šachovým jezdcem, tj. přesun kamene o dvě pole svisle nebo vodorovně a současně o jedno pole v druhém směru. Hráčka, která je na řadě a již nemůže táhnout, prohrává. Postupně pro $n = 4, 5, 6$ rozhodněte, která z hráček může hrát tak, že vyhraje nezávisle na tazích druhé hráčky. (*Pavel Calábek*)