Návody k domácí části I. kola kategorie A

1. *Označme n součet všech desetimístných čísel, která mají ve svém dekadickém zápise každou z číslic $0, 1, \ldots, 9$. Zjistěte zbytek po dělení čísla n sedmdesáti sedmi.*

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete počet všech desetimístných čísel, která mají ve svém desítkovém zápise každou z číslic 0, 1, ..., 9. $[10! - 9!]$

N2. Učitel si myslí číslo. Žákům prozradil, že jeho číslo končí číslicí 6 a dává při dělení třinácti zbytek 9. Určete, jaký zbytek dává učitelovo číslo při dělení číslem 65. [Učitelovo číslo n splňuje $n \equiv 1 \pmod 5$, $n \equiv 9 \pmod{13}$. Protože $65 = 5 \cdot 13$, musí být hledaný zbytek z množiny $\{9, 9+13, 9+26, 9+39, 9+52\}$. Z těchto čísel jedině $9 + 52 = 61$ dává správný zbytek při dělení pěti.]

N3. Dokažte, že číslo s dekadickým zápisem $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ dává při dělení jedenácti stejný zbytek jako číslo $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^k a_k$. [Tvrzení plyne z toho, že $10 \equiv -1 \pmod{11}$, tudíž $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$.]

D1. Dokažte, že jestliže čísla a, b dávají při dělení číslem d postupně zbytky u, v, jsou zbytky čísel ab, uv při dělení číslem d stejné.

D2. Dokažte, že zbytky čísel 1, 10, 10^2, 10^3, ... při dělení libovolným lichým prvočíslem různým od 5 tvoří periodickou posloupnost.

2. *Na setkání bylo několik lidí. Každí dva, kteří se neznali, měli mezi ostatními přítomnými právě dva společné známé. Účastníci A a B se znali, ale neměli ani jednoho společného známého. Dokažte, že A i B měli mezi přítomnými stejný počet známých. Ukažte rovněž, že na setkání mohlo být právě šest osob.*

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Na setkání bylo několik lidí. Každí dva, kteří se neznali, měli mezi ostatními přítomnými právě *jednoho* společného známého. Nikdo se neznal se všemi. Účastníci A a B se znali, ale neměli ani jednoho společného známého. Dokažte, že na setkání byla osoba, která neznala A ani B. [Kdyby A neměl kromě B žádného známého, musel by každý znát B, což nevyhovuje zadání. Proto A má kromě B aspoň jednoho známého X. Podobně B má kromě A známého Y. Přitom X a Y se nemohou znát, proto musejí mít společného známého Z, kterého nezná A ani B.]

D1. Dokažte, že rozložení na obr. 0a je jediné vyhovující rozložení se šesti osobami.

D2. Na setkání bylo několik lidí. Každí dva, kteří se neznali, měli mezi ostatními přítomnými právě *tři* společné známé. Účastníci A a B se znali, ale neměli ani jednoho společného známého. Dokažte, že A i B měli mezi přítomnými stejný počet známých. [Označme M_A množinu známých účastníka A různých od B a M_B množinu známých účastníka B různých od A, $m = |\mathsf{M}_A|$, $n = |\mathsf{M}_B|$. Zřejmě z každého vrcholu M_A vycházejí právě dvě hrany do M_B a obráceně, z každého vrcholu M_B vycházejí právě dvě hrany do M_A, takže $2m = 2n$ neboli $m = n$.]

D3. Ve skupině n žáků se někteří kamarádí. Víme, že každý má mezi ostatními aspoň čtyři kamarády. Učitelka chce žáky rozdělit na dvě nejvýše čtyřčlenné skupiny tak, aby každý měl ve své skupině aspoň jednoho kamaráda. a) Ukažte, že v případě $n = 7$ lze žáky požadovaným způsobem vždy rozdělit. b) Zjistěte, zda lze žáky vždy takto rozdělit i v případě $n = 8$. [60–C–I–4]

3. *Označme S střed kružnice vepsané, T těžiště a V průsečík výšek daného rovnoramenného trojúhelníku, který není rovnostranný.*

a) Dokažte, že bod S je vnitřním bodem úsečky TV.

b) Určete poměr délek stran daného trojúhelníku, je-li bod S středem úsečky TV.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že v každém trojúhelníku dělí osa úhlu protilehlou stranu v poměru stran přilehlých. [Jestliže D je průsečík strany CA a osy úhlu CBA, lze poměr q obsahů trojúhelníků BCD a BAD vyjádřit dvěma způsoby: $q = |BC| : |BA|$ (výšky z vrcholu D mají stejnou velikost) a zároveň $q = |CD| : |AD|$ (výšky z vrcholu B splývají).]

N2. V rovnoramenném trojúhelníku se základnou délky a a rameny délky b vyjádřete velikost poloměru ϱ vepsané kružnice. [$\varrho = \frac{1}{2}a\sqrt{4b^2 - a^2}/(a + 2b) = \frac{1}{2}a\sqrt{(2b - a)/(2b + a)}$]

N3. Dokažte platnost součtového vzorce $\operatorname{tg}(x + y) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)/(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)$.

D1. Na odvěsnách délek a, b pravoúhlého trojúhelníku leží postupně středy dvou kružnic k_a, k_b. Obě kružnice se dotýkají přepony a procházejí vrcholem proti přeponě. Poloměry uvedených kružnic označme ϱ_a, ϱ_b. Určete největší kladné číslo p takové, že nerovnost

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} \geqq p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

platí pro všechny pravoúhlé trojúhelníky. [58–A–II–2]

4. *Nechť p, q jsou dvě různá prvočísla, m, n přirozená čísla a součet*

$$\frac{mp - 1}{q} + \frac{nq - 1}{p}$$

je celé číslo. Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{m}{q} + \frac{n}{p} > 1.$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte několik čtveřic m, n, p, q vyhovujících předpokladům zadání. [Vyhovuje libovolná čtveřice, pro niž jsou oba zlomky $(mp - 1)/q$, $(nq - 1)/p$ celá čísla.]

N2. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla. Dokažte, že jestliže jsou a, b nesoudělná a $a \mid bc$, je $a \mid c$. [Protože $(a, b) = 1$, existují celá čísla x, y taková, že $ax+by = 1$. Protože $a \mid bc$, existuje k takové, že $ak = bc$. Odtud $aky = bcy = c(1 - ax)$, tedy $c = a(ky + cx)$ neboli $a \mid c$.]

N3. Pro celá čísla a, b, c, d platí $b \mid a + c$, $a \mid b + d$. Dokažte, že $ab \mid ad + bc + cd$. [$ab \mid (a + c)(b + d) = ab + (ad + bc + cd)$]

D1. Určete všechna celá kladná čísla m, n taková, že n dělí $2m-1$ a m dělí $2n-1$. [59–A–II–3]

D2. Určete všechny dvojice (m, n) kladných celých čísel, pro které je číslo $4(mn+1)$ dělitelné číslem $(m+n)^2$. [60–A–II–3]

D3. Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňující následující podmínky:

$$p \mid q+r, \quad q \mid r+2p, \quad r \mid p+3q.$$

[55–A–III–5]

5. *Jsou dány dvě shodné kružnice k_1, k_2 o poloměru rovném vzdálenosti jejich středů. Jejich průsečíky označme A a B. Na kružnici k_2 zvolme bod C tak, že úsečka BC protne kružnici k_1 v bodě různém od B, který označíme L. Přímka AC protne kružnici k_1 v bodě různém od A, který označíme K. Dokažte, že přímka, na níž leží těžnice z vrcholu C trojúhelníku KLC, prochází pevným bodem nezávislým na poloze bodu C.*

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že každý tětivový lichoběžník je rovnoramenný. [Jestliže $PQRS$ je tětivový lichoběžník se základnou PQ, ze střídavých úhlů plyne $|\sphericalangle QPR| = |\sphericalangle SRP|$. Obvodové úhly nad tětivami QR, PS tedy mají stejnou velikost, a proto musejí být tětivy QR, PS shodné. Jiný způsob: Osa každé tětivy prochází středem kružnice, proto je osa strany PQ totožná s osou strany RS (jsou rovnoběžné a procházejí společným bodem) a podle této osy jsou úsečky PS, QR souměrně sdružené, tedy shodné.]

N2. Dokažte, že ve čtyřúhelníku se úhlopříčky navzájem půlí, právě když to je rovnoběžník. [Jestliže se v čtyřúhelníku $ABCD$ úhlopříčky půlí v bodě S, jsou trojúhelníky ABS, CDS shodné a ze střídavých úhlů $AB \parallel CD$, analogicky $BC \parallel AD$. Jestliže $ABCD$ je rovnoběžník s průsečíkem úhlopříček S, plyne ze střídavých úhlů shodnost trojúhelníků ABS, CDS, tj. shodnost úseček BS, SD, resp. AS, SC.]

D1. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice průsečíku výšek trojúhelníku ABC s průsečíkem výšek trojúhelníku ABD je rovnoběžná s přímkou CD. [58–A–I–2]

D2. Je dána kružnice k s tětivou AC, která není průměrem. Na její tečně vedené bodem A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D průsečík kružnice k s vnitřkem úsečky XC (pokud existuje). Trojúhelník ACD doplníme na lichoběžník $ABCD$ vepsaný do kružnice k. Určete množinu průsečníků přímek BC a AD odpovídajících všem takovým lichoběžníkům. [59–A–III–4]

6. *Najděte největší reálné číslo k takové, že nerovnost*

$$\frac{2(a^2+kab+b^2)}{(k+2)(a+b)} \geqq \sqrt{ab}$$

platí pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete, jaké hodnoty nabývá výraz $x+1/x$ pro $x > 0$. [Protože $(\sqrt{x}-1/\sqrt{x})^2 \geqq$ $\geqq 0$, máme $x + 1/x \geqq 2$. Rovnost nastává pro $x = 1$. Výraz nabyde i všechny hodnoty větší než 2, protože rovnice $x + 1/x = p$ má pro $p > 2$ dva kladné kořeny $\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4}$.]

N2. Určete všechny hodnoty parametru p, pro které kvadratická funkce $f(x) =$ $= x^2 + px + p - 1$ nabývá v oboru kladných čísel jen kladných hodnot. [Protože $f(x) = (x + 1)(x + p - 1)$, jsou kořeny funkce -1 a $1 - p$. Daná podmínka je splněna, právě když ani jeden z kořenů není kladný, tedy právě když $p \geqq 1$.]

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} \leqq \frac{a + b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy se mění v rovnost. [59–C–I–5]

D2. Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla a, b platí

$$\frac{a + b}{2} < \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

[58–C–I–6]