Návody k domácí části I. kola kategorie B

1. *Mezi všemi desetimístnými čísly dělitelnými jedenácti, v nichž se žádná číslice neopakuje, najděte nejmenší a největší.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte kritérium dělitelnosti jedenácti, tj. že celé číslo je dělitelné jedenácti, právě když je jedenácti dělitelný součet jeho číslic braných střídavě se znaménkem plus a minus. [Kritérium plyne z toho, že 10 dává při dělení jedenácti stejný zbytek jako -1, tudíž jednotlivé řády 10^n dávají zbytek $(-1)^n$.]
2. Dokažte, že žádné desetimístné číslo složené ze vzájemně různých číslic, v jehož dekadickém zápise se střídají sudé a liché číslice, není dělitelné jedenácti.
3. Určete počet pětimístných čísel složených ze vzájemně různých a) lichých, b) sudých číslic a dělitelných jedenácti. [a) 0, b) 16]
4. Bez dělení ukažte, že číslo 20 111 102 je dělitelné jedenácti. Pak k němu najděte nejbližší menší a nejbližší větší číslo dělitelné jedenácti složené ze stejných číslic jako dané číslo. [menší 20 110 211, větší 20 111 201]
5. Dokažte, že platí: Číslo $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ je dělitelné jedenácti, právě když je dělitelné jedenácti číslo $\overline{a_9a_8} + \overline{a_7a_6} + \overline{a_5a_4} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0}$.

2. *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, jehož obsah označme P. Nechť F je pata výšky z vrcholu C na přeponu AB. Na kolmicích k přímce AB, které procházejí vrcholy A a B, v polorovině opačné k polorovině ABC uvažujme po řadě body D a E, pro něž platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Obsah trojúhelníku DEF označme Q. Dokažte, že platí $P \geqq Q$, a zjistěte, kdy nastane rovnost.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla a, b platí nerovnost $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}} \geqq 2$.
2. V obdélníku $ABCD$ s délkami stran $|AB| = a, |BC| = b$ označme E patu kolmice spuštěné z vrcholu B na úhlopříčku AC. Určete délky úseček AE, CE, BE. [$|AE| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|CE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|BE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$]
3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB je E pata výšky z vrcholu C, D pata výšky z bodu E na stranu AC a F pata výšky z bodu E na stranu BC. Dokažte, že obsah čtyřúhelníku $CDEF$ je nejvýše roven polovině obsahu trojúhelníku ABC. Kdy nastane rovnost? [Protože trojúhelníky AED a EBF jsou podobné trojúhelníku ABC s koeficienty podobnosti α a $1-\alpha$, je obsah pravoúhelníku $CDEF$ roven $S - (\alpha^2 + (1-\alpha)^2)S = 2\alpha(1-\alpha)S$, kde S značí obsah daného trojúhelníku ABC. Požadovaná nerovnost je tak ekvivalentní nerovnosti $\alpha(1-\alpha) \leqq \frac{1}{4}$ neboli $(2\alpha-1)^2 \geqq 0$.]

3. *Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, které vyhovují soustavě rovnic*

$$x \cdot \lfloor y \rfloor = 7,$$
$$y \cdot \lfloor x \rfloor = 8.$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ značí dolní celou část čísla a, tj. největší celé číslo, které nepřevyšuje a.)

Návodné a doplňující úlohy:

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici: a) $\lfloor x \rfloor^2 = 4$, b) $\lfloor x^2 \rfloor = 4$, c) $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + 3}{2} \right\rfloor = 4$, d) $\left\lfloor \frac{2011}{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = 4$. [a) $x \in \langle -2, -1) \cup \langle 2, 3)$, b) $2 \leqq |x| < \sqrt{5}$, c) $x \in \langle 5, 7)$, d) $x \in \langle 403, 503)$]
2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $xy = 2$, $x \lfloor y \rfloor = 4$. [Zřejmě $x < 0$, $y < 0$. Dokažte dále, že $\lfloor -u \rfloor = -\lfloor u \rfloor$ pro každé celé číslo a $\lfloor -u \rfloor = -\lfloor u \rfloor - 1$ jinak. Dobře je to též vidět z grafu funkce $y = \lfloor x \rfloor$. Vyjde $x = -4$, $y = -\frac{1}{2}$.]
3. Dokažte, že pro každé reálné číslo x a každé celé číslo k platí $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

4. *Jsou dány dvě různoběžky a, c procházející bodem P a bod B, který na nich neleží. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$ s vrcholy A, C a D po řadě na přímkách a, c a PB.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Jsou dány dvě různoběžky a, c a bod S neležící na žádné z nich. Sestrojte čtverec $ABCD$ se středem S tak, aby bod A ležel na přímce a a bod C na přímce c. [Sestrojíme přímku a' jako obraz přímky a ve středové souměrnosti se středem S, průnik přímek a', c dává bod C.]
2. Jsou dány dvě různoběžky a, c, jejichž průsečík P je mimo nákresnu, a bod B neležící na žádné z nich. Sestrojte přímku b procházející body B, P. [Sestrojíme libovolný trojúhelník ABC, kde $A \in a$ a $C \in c$, a pak sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$, který bude jeho obrazem v nějaké stejnolehlosti se středem v bodě P.]
3. Je dána úsečka AB. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB tak, aby $|AC| = 2 \cdot |BC|$. [Sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ požadované vlastnosti a pak pomocí stejnolehlosti (např. se středem v jednom z vrcholů) sestrojíme trojúhelník, jehož přepona bude mít délku $|AB|$.]

5. *V jistém městě mají vybudovanou síť na šíření pomluv, v níž si každý pomlouvač vyměňuje informace se třemi pomlouvačkami a každá pomlouvačka si vyměňuje informace se třemi pomlouvači. Jinak se pomluvy nešíří.*

a) Dokažte, že pomlouvačů a pomlouvaček je stejný počet.

b) Předpokládejme, že síť na pomlouvání je souvislá (pomluvy od libovolného pomlouvače a libovolné pomlouvačky se mohou dostat ke všem ostatním). Dokažte, že i když jeden pomlouvač zemře, zůstane síť souvislá.

Návodné a doplňující úlohy:

1. V síti na šíření pomluv je m pomlouvačů a n pomlouvaček. Každý z pomlouvačů je ve spojení s a pomlouvačkami a každá pomlouvačka je ve spojení s b pomlouvači. Jinak se pomluvy nešíří. Jaký je vztah mezi proměnnými a, b, m, n? [$ma = nb$]

2. Vytvořte model souvislé sítě popsané v textu soutěžní úlohy pro 3, 4, 5, ... pomlouvačů a pomlouvaček. Ukažte v tomto modelu, že po odstranění kteréhokoli pomlouvače zůstane síť souvislá.
3. Pro jaký počet pomlouvačů a pomlouvaček může být síť popsaná v textu soutěžní úlohy nesouvislá? [pro 6, 7, 8, ...]
4. V souvislé síti na šíření pomluv je každý pomlouvač ve spojení s aspoň a) jedním, b) dvěma dalšími pomlouvači. Zůstane síť souvislá, zemře-li jeden z nich? [a) i b): může, ale nemusí zůstat souvislá, záleží na tvaru sítě]

6. *Anna a Bedřich hrají karetní hru. Každý z nich má pět karet s hodnotami 1 až 5 (od každé jednu). V každém z pěti kol oba vyloží jednu kartu, a kdo má vyšší číslo, získá bod. V případě karet se stejnými čísly nezíská bod nikdo. Použité karty se do hry nevracejí. Kdo získá na konci více bodů, vyhrál. Kolik procent ze všech možných průběhů takové hry skončí výhrou Anny?*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Jaké jsou možné bodové výsledky karetní hry v soutěžní úloze? [4 : 1, 1 : 4, 3 : 2, 2 : 3, 3 : 1, 1 : 3, 2 : 2, 2 : 1, 1 : 2, 1 : 1, 0 : 0]
2. Kolika způsoby může proběhnout „zkrácený" volejbalový set, pokud skončí pátým bodem a vítěz musí vyhrát aspoň o dva body? [$\binom{4}{0} + \binom{5}{1} + \binom{6}{2} + \binom{7}{3} =$ $= 1+5+15+35 = 56$, při tak malých hodnotách se dá počítat bez kombinačních čísel.]
3. Jaký je počet desetimístných čísel složených z různých číslic, v nichž se střídají sudé a liché číslice? Kolik je to procent ze všech desetimístných čísel složených z různých číslic? [$5! \cdot 5! + 4 \cdot 4! \cdot 5! = 9 \cdot 4! \cdot 5!$, $\frac{9 \cdot 4! \cdot 5!}{9 \cdot 9!} = \frac{1}{2 \cdot 63} \approx 0{,}008 = 0{,}8\,\%$]