61. ročník Matematické olympiády

Návody k domácí části I. kola kategorie C

1. *Najděte všechny trojčleny $p(x) = ax^2 + bx + c$, které dávají při dělení dvojčlenem $x + 1$ zbytek 2 a při dělení dvojčlenem $x + 2$ zbytek 1, přičemž $p(1) = 61$.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Ukažte, že pro každé číslo a je mnohočlen $x^4 + (1 - a)x^3 + x^2 + a$ dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$ beze zbytku. [Podíl je roven $x^2 - ax + a$.]
2. Určete všechna reálná čísla a, pro která je trojčlen x^2+5x+6 dělitelný dvojčlenem $x+a$. Řešte jednak užitím algoritmu dělení, jednak užitím pravidla (často zvaného *Bezoutova věta*), že mnohočlen $p(x)$ je dělitelný dvojčlenem $x - x_0$, právě když $p(x_0) = 0$. [Vyhovují čísla $a = 2$ a $a = 3$, neboť přímým dělením dostaneme rovnost mnohočlenů $x^2 + 5x + 6 = (x + a)(x + 5 - a) + a^2 - 5a + 6$, takže hledaná čísla a jsou kořeny rovnice $a^2 - 5a + 6 = 0$.]
3. Určete všechna reálná čísla a, pro která trojčlen $x^2 + 5x + 6$ dává při dělení dvojčlenem $x + a$ zbytek 2. [Vyhovují čísla $a = 1$ a $a = 4$, která dostaneme, když pro obecný zbytek $a^2 - 5a + 6$ (viz úlohu 2) sestavíme a vyřešíme rovnici $a^2 - 5a + 6 = 2$.]
4. Ukažte, že všechny trojčleny $p(x) = ax^2 + 2(a - 1)x - 4$, kde a je libovolné číslo, jsou dělitelné jedním a týmž dvojčlenem $x + b$ s vhodným koeficientem b. Jakým? [$b = 2$. Číslo b má požadovanou vlastnost, právě když platí $p(-b) = 0$. Protože $p(-b) = a(b^2 - 2b) + 2b - 4 = (b - 2)(ab + 2)$, je rovnost $p(-b) = 0$ splněna pro každé a, právě když $b = 2$.]
5. Určete všechny dvojice reálných čísel a a b, pro něž je mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ dělitelný mnohočlenem $x^2 + bx + a$. [56–B–S–1]

2. *Délky stran trojúhelníku jsou v metrech vyjádřeny celými čísly. Určete je, má-li trojúhelník obvod 72 m a je-li nejdelší strana trojúhelníku rozdělena bodem dotyku vepsané kružnice v poměru 3 : 4.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Pomocí délek a, b, c stran obecného trojúhelníku vyjádřete délky úseček, na které jsou tyto strany rozděleny body dotyku kružnice, která je dotyčnému trojúhelníku vepsána. Na příkladu pak ukažte, že tyto délky nemusejí být vyjádřeny celými čísly, i když strany trojúhelníku taková vyjádření mají. [Jedná se o dvě úsečky délky $x = \frac{1}{2}(a+b-c)$, dvě úsečky délky $y = \frac{1}{2}(b+c-a)$ a dvě úsečky délky $z = \frac{1}{2}(c + a - b)$. Tyto délky nejsou celočíselné, jsou-li například všechny tři délky a, b, c vyjádřeny lichými čísly.]
2. Sestrojíme-li ze tří úseček jakýchkoliv délek p, q, r úsečky délek $a = p + q$, $b = q + r$ a $c = r + p$, budou tyto tři nové úsečky délkami stran některého trojúhelníku. Vysvětlete a pak uveďte, jaký význam v takovém trojúhelníku budou mít původní délky p, q, r. [Ověřit algebraicky trojúhelníkové nerovnosti $a + b > c > |a - b|$ je triviální, neboť jde o zřejmé nerovnosti $p + 2q + r > > p + r > |p - r|$. V trojúhelníku o stranách a, b, c jsou délky p, q, r délkami

úseček, na které jsou strany a, b, c rozděleny body dotyku vepsané kružnice, jak plyne z výsledku úlohy 1.]

3. Trojúhelník ABC splňuje při obvyklém značení délek stran podmínku $a \leqq b \leqq$ $\leqq c$. Vepsaná kružnice se dotýká stran AB, BC a AC po řadě v bodech K, L a M. Dokažte, že z úseček AK, BL a CM lze sestrojit trojúhelník, právě když platí $b + c < 3a$. [57–C–II–1]
4. Dokažte, že v každém pravoúhlém trojúhelníku je součet poloměrů vepsané kružnice a opsané kružnice roven aritmetickému průměru délek obou odvěsen. [První řešení úlohy 59–A–S–2.]
5. Určete délku přepony pravoúhlého trojúhelníku, znáte-li poloměr r kružnice vepsané a poloměr R kružnice připsané k přeponě tohoto trojúhelníku (tj. kružnice, která se dotýká zvnějšku přepony a prodloužení obou odvěsen trojúhelníku). [45–C–I–6]

3. *Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c, pro něž platí množinová rovnost*

$$\big\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\big\} = \{2,3,5,60,90,180\},$$

kde (x,y) a $[x,y]$ značí po řadě největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel x a y.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Určete, pro která přirozená čísla a, b platí $(a,b) = 10$ a zároveň $[a,b] = 150$. [$\{a,b\} = \{10,150\}$ nebo $\{a,b\} = \{30,50\}$. Protože $10 = 2 \cdot 5$ a $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, požadované rovnosti jsou splněny, právě když $a = 2 \cdot 3^s \cdot 5^t$ a $b = 2 \cdot 3^u \cdot 5^v$, kde $\{s,u\} = \{0,1\}$ a $\{t,v\} = \{1,2\}$.]
2. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b platí vztah $[a,b]\cdot(a,b) = ab$. [Podle úvahy o počtech zastoupení každého prvočísla v číslech a, b, (a,b) a $[a,b]$ stačí vysvětlit, proč pro jakákoliv čísla α, β platí rovnost $\min\{\alpha,\beta\} + \max\{\alpha,\beta\} =$ $= \alpha + \beta$. K tomu stačí rozlišit případy $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ a $\alpha > \beta$. Jiné řešení: Nechť $d = (a,b)$, potom $a = xd$, $b = yd$ pro nesoudělná x a y, odkud plyne $[a,b] = xyd$, takže oba součiny $[a,b] \cdot (a,b)$ a ab se rovnají číslu xyd^2.]
3. Najděte všechny trojice a, b, c přirozených čísel, pro které současně platí $(ab,c) = 2^8$, $(bc,a) = 2^9$ a $(ca,b) = 2^{11}$. [50–C–S–1]
4. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro které platí $a + b + [a,b] +$ $+ (a,b) = 50$. [50–C–II–1]
5. Pro libovolná přirozená čísla a, b dokažte nerovnost $a \cdot (a,b) + b \cdot [a,b] \geqq 2ab$. Zjistěte rovněž, kdy v této nerovnosti nastane rovnost. [60–C–I–5]

4. *Reálná čísla a, b, c, d vyhovují rovnici $ab + bc + cd + da = 16$.*

a) Dokažte, že mezi čísly a, b, c, d se najdou dvě se součtem nejvýše 4.
b) Jakou nejmenší hodnotu může mít součet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Splňují-li reálná čísla x, y, z rovnici $x^2 + y^2 = z^2$, pak aspoň jedno z čísel $|x + z|$, $|x - z|$ nepřevyšuje hodnotu $|y|$. Dokažte. [Kdyby $|x + z|$, $|x - z|$ byla dvě (kladná) čísla větší než $|y|$, bylo by číslo $|x + z| \cdot |x - z|$ větší než $|y|^2$, podle zadání však jde o dvě stejná čísla.]

2. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla. Ukažte, že čísla $x + y + z - xyz$ a $xy + yz + zx - 3$ nemohou být záporná současně. [60–C-II–4]
3. Je dáno přirozené číslo n ($n \geqq 2$) a reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, pro která platí $x_1x_2 = x_2x_3 = \dots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1$. Dokažte nerovnost $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geqq n$. [55–C–I–4]
4. Splňují-li reálná čísla a, b, c, d rovnosti $a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1$, platí nerovnost $ab+ac+ad+bc+bd+cd \leqq 3$. Dokažte a zjistěte, kdy přitom nastane rovnost. [55–C–II–2]
5. Dokažte, že nerovnost $(a^2+1)(b^2+1) - (a-1)^2(b-1)^2 \geqq 4$ platí pro libovolná čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$. Zjistěte, kdy nastane rovnost. [59–C–II–2]
6. Dokažte, že nerovnost $(a+bc)(b+ac) \geqq ab(c+1)^2$ platí pro libovolná nezáporná čísla a, b, c. Zjistěte, kdy nastane rovnost. [58–C–S–1]
7. Nerovnosti $\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ dokažte pro libovolná různá kladná čísla a, b. [58–C–I–6]
8. Nechť a, b, c jsou reálná čísla, jejichž součet je 6. Dokažte, že aspoň jedno z čísel $ab + bc$, $bc + ca$ nebo $ca + ab$ není větší než 8. [60–B–I–3]

5. *Je dán rovnoramenný trojúhelník se základnou délky a a rameny délky b. Pomocí nich vyjádřete poloměr R kružnice opsané a poloměr r kružnice vepsané tomuto trojúhelníku. Pak ukažte, že platí $R \geqq 2r$, a zjistěte, kdy nastane rovnost.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Pro obecný trojúhelník ABC o stranách a, b, c a obsahu S platí pro poloměr r kružnice vepsané vzorec $r = 2S/(a+b+c)$. Dokažte. [Střed M vepsané kružnice rozděluje uvažovaný trojúhelník ABC na tři menší trojúhelníky BCM, ACM, ABM o obsazích $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, jejichž součet se rovná S, odkud plyne dokazovaný vzorec.]
2. Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ mají vnitřní dotyk v bodě B. Určete délky stran trojúhelníku ABC, kde bod A je průsečík přímky OB s kružnicí k a bod C je průsečík kružnice k s tečnou z bodu A ke kružnici l. [59–C–S–2]
3. Kružnice $l(T; s)$ prochází středem kružnice $k(S; 2\,\mathrm{cm})$. Kružnice $m(U; t)$ se vně dotýká kružnic k a l, přičemž $US \perp ST$. Poloměry s a t vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Určete je. [59–B–II–1]
4. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A, B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D, E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC. [58–C–I–2]
5. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB a obsahem S je opsána kružnice. Tečna k této kružnici v bodě C protíná tečny vedené body A a B v bodech D a E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délky c přepony a obsahu S. [58–C–II–4]
6. Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD lze vepsat kružnici se středem O. Určete obsah S lichoběžníku, jsou-li dány délky úseček OB a OC. [56–C–II–3]
7. Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtěte poloměr kružnice m. Najděte všechna řešení. [55–C–I–2]

8. Kružnice k, l s vnějším dotykem leží obě v obdélníku $ABCD$, jehož obsah je $72\,\mathrm{cm}^2$. Kružnice k se přitom dotýká stran CD, DA a AB, zatímco kružnice l se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry kružnic k a l, jestliže poloměr kružnice k je v centimetrech vyjádřen celým číslem. [55–C–II–3]

6. *Na hrací desce $n \times n$ tvořené bílými čtvercovými poli se Markéta a Tereza střídají v tazích jedním kamenem při následující hře. Nejprve Markéta umístí kámen na libovolné pole a toto pole obarví modře. Dále vždy hráčka, která je na tahu, provede s kamenem skok na pole, které je dosud bílé, a toto pole obarví modře. Přitom skokem rozumíme obvyklý tah šachovým jezdcem, tj. přesun kamene o dvě pole svisle nebo vodorovně a současně o jedno pole v druhém směru. Hráčka, která je na řadě a již nemůže táhnout, prohrává. Postupně pro $n = 4, 5, 6$ rozhodněte, která z hráček může hrát tak, že vyhraje nezávisle na tazích druhé hráčky.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Řešte jednodušší variantu zadaného příkladu, kdy povolené *skoky* jsou tahy šachovou věží, tj. přesuny kamene ve směru řádků nebo ve směru sloupců hrací desky (o libovolný počet polí). Dokážete objevit vítěznou strategii pro tuto variantu hry v případě hrací desky libovolných rozměrů $m \times n$? [Jsou-li obě čísla m a n lichá, má vítěznou strategii první hráčka, je-li aspoň jedno z čísel m, n sudé, má vítěznou strategii druhá hráčka. V obou případech si zmíněná hráčka předem v duchu rozdělí všechna pole hrací desky do dvojic (v prvním případě jedno pole zbyde, na ně pak hráčka položí kámen v úvodním tahu), a to tak, aby v každém sestaveném páru byla pole navzájem dosažitelná jedním skokem (pro tahy věží je to snadné, stačí párovat pouze sousední pole téhož řádku nebo sloupce); v průběhu hry pak tato hráčka může vždy táhnout z jednoho pole na druhé pole téhož páru, takže vyhraje.]
2. Na tabuli jsou napsána všechna prvočísla menší než 100. Markéta a Tereza se střídají v tazích při následující hře. Nejprve Markéta smaže jedno z prvočísel. Dále vždy hráčka, která je na tahu, smaže jedno z prvočísel, které má s předchozím smazaným prvočíslem jednu shodnou číslici (tak po prvočíslu 3 lze smazat třeba 13 nebo 37). Hráčka, která je na tahu a nemůže již žádné prvočíslo smazat, prohrává. Která z obou hráček může hrát tak, že vyhraje nezávisle na tazích druhé hráčky? [Protože prvočísel menších než 100 je lichý počet (25), nabízí se hypotéza, že vítěznou strategii bude mít první hráčka. Ukažme, že je tomu skutečně tak. Tato hráčka si předem v duchu spáruje (podle společné číslice) napsaná prvočísla (lze to provést mnoha způsoby, uveďme ten, kdy v každém kroku párujeme nejmenší dosud nespárované prvočíslo s nejmenším dalším dosud nespárovaným prvočíslem o společné číslici): $(2, 23)$, $(3, 13)$, $(5, 53)$, $(7, 17)$, $(11, 19)$, $(29, 59)$, $(31, 37)$, $(41, 43)$, $(47, 67)$, $(61, 71)$, $(73, 79)$, $(83, 89)$; jediné zbylé nespárované prvočíslo 97 proto hráčka smaže jako první a dále při hře bude mazat vždy prvočíslo, které je ve stejném páru s předchozím smazaným prvočíslem. Tímto postupem musí vyhrát.]
3. Dvě hráčky mají k dispozici pro hru, kterou popíšeme, neomezený počet pětikorun a stůl s kruhovou deskou o průměru 1 metr. Hra probíhá tak, že se hráčky pravidelně střídají v tazích. Nejprve první hráčka položí jednu pětikorunu na prázdný stůl kamkoliv. Dále vždy hráčka, která je na tahu, položí na volnou část stolu další pětikorunu (tak, aby nepřesahovala okraj stolu a aby se dříve

uložených pětikorun nejvýše dotýkala). Která z obou hráček může hrát tak, že vyhraje nezávisle na tazích druhé hráčky? [Vítěznou strategii má první hráčka: první minci položí doprostřed stolu a v každém dalším kroku položí minci na místo souměrně sdružené podle středu stolu s místem právě položené mince.]