61. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Najděte všechny trojčleny* $p(x) = ax^2 + bx + c$*, které dávají při dělení dvojčlenem* $x + 1$ *zbytek* 2 *a při dělení dvojčlenem* $x + 2$ *zbytek* 1*, přičemž* $p(1) = 61$*.*

ŘEŠENÍ. Dvojím užitím algoritmu dělení dostaneme

$$ax^2 + bx + c = (ax + b - a)(x + 1) + c - b + a,$$
$$ax^2 + bx + c = (ax + b - 2a)(x + 2) + c - 2b + 4a.$$

Dodejme k tomu, že nalezené zbytky $c - b + a$ a $c - 2b + 4a$ jsou zřejmě rovny hodnotám $p(-1)$, resp. $p(-2)$, což je ve shodě s poznatkem, že jakýkoliv mnohočlen $q(x)$ dává při dělení dvojčlenem $x - x_0$ zbytek rovný číslu $q(x_0)$.

Podle zadání platí $c - b + a = 2$ a $c - 2b + 4a = 1$. Třetí rovnice $a + b + c = 61$ je vyjádřením podmínky $p(1) = 61$. Získanou soustavu tří rovnic vyřešíme jedním z mnoha možných postupů.

Z první rovnice vyjádříme $c = b - a + 2$, po dosazení do třetí rovnice dostaneme $a + b + (b - a + 2) = 61$ neboli $2b = 59$. Odtud $b = 59/2$, což po dosazení do první a druhé rovnice dává $a + c = 63/2$, resp. $c + 4a = 60$. Odečteme-li poslední dvě rovnice od sebe, dostaneme $3a = 57/2$, odkud $a = 19/2$, takže $c = 63/2 - 19/2 = 22$. Hledaný trojčlen je tedy jediný a má tvar

$$p(x) = \frac{19}{2} \cdot x^2 + \frac{59}{2} \cdot x + 22 = \frac{19x^2 + 59x + 44}{2}.$$

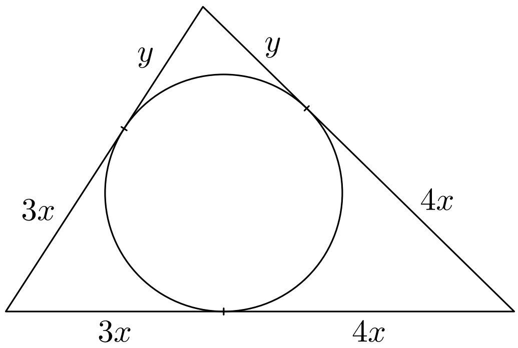
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Ukažte, že pro každé číslo a je mnohočlen $x^4 + (1-a)x^3 + x^2 + a$ dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$ beze zbytku. [Podíl je roven $x^2 - ax + a$.]
2. Určete všechna reálná čísla a, pro která je trojčlen $x^2 + 5x + 6$ dělitelný dvojčlenem $x + a$. Řešte jednak užitím algoritmu dělení, jednak užitím pravidla (často zvaného *Bezoutova věta*), že mnohočlen $p(x)$ je dělitelný dvojčlenem $x - x_0$, právě když $p(x_0) = 0$. [Vyhovují čísla $a = 2$ a $a = 3$, neboť přímým dělením dostaneme rovnost mnohočlenů $x^2 + 5x + 6 = (x + a)(x + 5 - a) + a^2 - 5a + 6$, takže hledaná čísla a jsou kořeny rovnice $a^2 - 5a + 6 = 0$.]
3. Určete všechna reálná čísla a, pro která trojčlen $x^2 + 5x + 6$ dává při dělení dvojčlenem $x + a$ zbytek 2. [Vyhovují čísla $a = 1$ a $a = 4$, která dostaneme, když pro obecný zbytek $a^2 - 5a + 6$ (viz úlohu 2) sestavíme a vyřešíme rovnici $a^2 - 5a + 6 = 2$.]
4. Ukažte, že všechny trojčleny $p(x) = ax^2 + 2(a - 1)x - 4$, kde a je libovolné číslo, jsou dělitelné jedním a týmž dvojčlenem $x + b$ s vhodným koeficientem b. Jakým? [$b = 2$. Číslo b má požadovanou vlastnost, právě když platí $p(-b) = 0$. Protože $p(-b) = a(b^2 - 2b) + 2b - 4 = (b - 2)(ab + 2)$, je rovnost $p(-b) = 0$ splněna pro každé a, právě když $b = 2$.]
5. Určete všechny dvojice reálných čísel a a b, pro něž je mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ dělitelný mnohočlenem $x^2 + bx + a$. [56–B–S–1]

2. *Délky stran trojúhelníku jsou v metrech vyjádřeny celými čísly. Určete je, má-li trojúhelník obvod* $72\,m$ *a je-li nejdelší strana trojúhelníku rozdělena bodem dotyku vepsané kružnice v poměru* $3:4$.

Řešení. Využijeme obecného poznatku, že body dotyku vepsané kružnice dělí hranici trojúhelníku na šest úseček, a to tak, že každé dvě z nich, které vycházejí ze stejného vrcholu trojúhelníku, jsou shodné. (Tečny z daného bodu k dané kružnici jsou totiž souměrně sdružené podle spojnice daného bodu se středem dané kružnice.)

V naší úloze je nejdelší strana trojúhelníku rozdělena na úseky, jejichž délky označíme $3x$ a $4x$, zatímco délku úseků z vrcholu oproti nejdelší straně označíme y (obr. 1). Strany trojúhelníku mají tudíž délky $7x$, $4x+y$ a $3x+y$, kde x, y jsou neznámá kladná čísla (délky bereme bez jednotek). Má-li být $7x$ délka nejdelší strany, musí platit $7x > 4x + y$ neboli $3x > y$. Zdůrazněme, že hledaná čísla x, y nemusejí být nutně celá, podle zadání to však platí o číslech $7x$, $4x+y$ a $3x+y$.



Obr. 1

Údaj o obvodu trojúhelníku zapíšeme rovností

$$72 = 7x + (3x + y) + (4x + y) \quad \text{neboli} \quad 36 = 7x + y.$$

Protože $7x$ je celé číslo, je celé i číslo $y = 36 - 7x$; a protože podle zadání i čísla $4x+y$ a $3x+y$ jsou celá, je celé i číslo $x = (4x+y) - (3x+y)$. Proto od této chvíle už hledáme dvojice *celých* kladných čísel x, y, pro něž platí

$$3x > y \quad \text{a} \quad 7x + y = 36.$$

Odtud ovšem plyne $7x < 36 < 7x + 3x = 10x$, tedy $x \leqq 5$ a současně $x \geqq 4$.

Pro $x = 4$ je tak $y = 8$ a $(7x, 4x+y, 3x+y) = (28, 24, 20)$, pro $x = 5$ je $y = 1$ a $(7x, 4x+y, 3x+y) = (35, 21, 16)$. Strany trojúhelníku tedy jsou $(28, 24, 20)$ nebo $(35, 21, 16)$. (Trojúhelníkové nerovnosti jsou zřejmě splněny.)

Návodné a doplňující úlohy:

1. Pomocí délek a, b, c stran obecného trojúhelníku vyjádřete délky úseček, na které jsou tyto strany rozděleny body dotyku kružnice, která je dotyčnému trojúhelníku vepsána. Na příkladu pak ukažte, že tyto délky nemusejí být vyjádřeny celými čísly, i když strany trojúhelníku taková vyjádření mají. [Jedná se o dvě úsečky délky $x = \frac{1}{2}(a+b-c)$, dvě úsečky délky $y = \frac{1}{2}(b+c-a)$ a dvě úsečky délky $z = \frac{1}{2}(c+a-b)$. Tyto délky nejsou celočíselné, jsou-li například všechny tři délky a, b, c vyjádřeny lichými čísly.]
2. Sestrojíme-li ze tří úseček jakýchkoliv délek p, q, r úsečky délek $a = p+q$, $b = q+r$ a $c = r+p$, budou tyto tři nové úsečky délkami stran některého trojúhelníku. Vysvětlete a pak uveďte, jaký význam v takovém trojúhelníku budou mít původní délky p, q, r. [Ověřit algebraicky trojúhelníkové nerovnosti $a+b > c > |a-b|$ je triviální, neboť jde o zřejmé nerovnosti $p+2q+r > p+r > |p-r|$. V trojúhelníku o stranách a, b, c jsou

délky p, q, r délkami úseček, na které jsou strany a, b, c rozděleny body dotyku vepsané kružnice, jak plyne z výsledku úlohy 1.]

3. Trojúhelník ABC splňuje při obvyklém značení délek stran podmínku $a \leqq b \leqq c$. Vepsaná kružnice se dotýká stran AB, BC a AC po řadě v bodech K, L a M. Dokažte, že z úseček AK, BL a CM lze sestrojit trojúhelník, právě když platí $b + c < 3a$. [57–C–II–1]
4. Dokažte, že v každém pravoúhlém trojúhelníku je součet poloměrů vepsané kružnice a opsané kružnice roven aritmetickému průměru délek obou odvěsen. [První řešení úlohy 59–A–S–2.]
5. Určete délku přepony pravoúhlého trojúhelníku, znáte-li poloměr r kružnice vepsané a poloměr R kružnice připsané k přeponě tohoto trojúhelníku (tj. kružnice, která se dotýká zvnějšku přepony a prodloužení obou odvěsen trojúhelníku). [45–C–I–6]

3. *Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c, pro něž platí množinová rovnost*

$$\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\} = \{2,3,5,60,90,180\},$$

kde (x,y) a $[x,y]$ značí po řadě největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel x a y.

Řešení. Prvky zadané množiny M rozložíme na prvočinitele:

$$\mathsf{M} = \{2,\ 3,\ 5,\ 2^2\cdot 3\cdot 5,\ 2\cdot 3^2\cdot 5,\ 2^2\cdot 3^2\cdot 5\}.$$

Odtud plyne, že v rozkladu hledaných čísel a, b, c vystupují pouze prvočísla 2, 3 a 5. Každé z nich je přitom prvočinitelem právě dvou z čísel a, b, c: kdyby bylo prvočinitelem pouze jednoho z nich, chybělo by v rozkladu dvou největších společných dělitelů a jednoho nejmenšího společného násobku, tedy ve třech číslech z M; kdyby naopak bylo prvočinitelem všech tří čísel a, b, c, nechybělo by v rozkladu žádného čísla z M. Kromě toho vidíme, že v rozkladu každého z čísel a, b, c je prvočíslo 5 nejvýše v jednom exempláři.

Podle uvedených zjištění můžeme čísla a, b, c uspořádat tak, že rozklady čísel a, b obsahují po jednom exempláři prvočísla 5 (zatímco $(c,5) = 1$) a že $(a,2) = 2$ (jak víme, aspoň jedno z čísel a, b musí být sudé). Číslo 5 z množiny M je pak nutně rovno (a,b), takže platí $(b,2) = 1$, a proto $(b,3) = 3$ (jinak by platilo $(b,c) = 1$), odkud zase s ohledem na $(a,b) = 5$ plyne $(a,3) = 1$. Máme tedy $a = 5\cdot 2^s$ a $b = 5\cdot 3^t$ pro vhodná přirozená čísla s a t.

Z rovnosti $[a,b] = 2^s\cdot 3^t\cdot 5$ plyne, že nastane jeden ze tří následujících případů.

(1) $2^s\cdot 3^t\cdot 5 = 60 = 2^2\cdot 3^1\cdot 5$. Vidíme, že platí $s = 2$ a $t = 1$ neboli $a = 20$ a $b = 15$. Snadno určíme, že třetím číslem je $c = 18$.

(2) $2^s\cdot 3^t\cdot 5 = 90 = 2^1\cdot 3^2\cdot 5$. V tomto případě $a = 10$, $b = 45$ a $c = 12$.

(3) $2^s\cdot 3^t\cdot 5 = 180 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5$. Nyní $a = 20$, $b = 45$ a $c = 6$.

Odpověď: Hledaná čísla a, b, c tvoří jednu z množin $\{10,45,12\}$, $\{20,15,18\}$ a $\{20,45,6\}$.

Jiné řešení. V zadané rovnosti je množina napravo tvořena šesti různými čísly většími než 1, takže čísla (a,b), (a,c), (b,c) musí být netriviálními děliteli po řadě čísel $[a,b]$, $[a,c]$, $[b,c]$. Čísla 2, 3, 5 však žádné netriviální dělitele nemají, musí tedy platit

$$\{(a,b),(a,c),(b,c)\} = \{2,3,5\} \quad \text{a} \quad \{[a,b],[a,c],[b,c]\} = \{60,90,180\}.$$

Protože pořadí čísel a, b, c nehraje žádnou roli, můžeme předpokládat, že platí $(a,b) = 2$, $(a,c) = 3$ a $(b,c) = 5$. Odtud plynou vyjádření

$$a = 2\cdot 3\cdot x = 6x,\quad b = 2\cdot 5\cdot y = 10y,\quad c = 3\cdot 5\cdot z = 15z$$

pro vhodná přirozená čísla x, y, z. Ze známé rovnosti $[x,y]\cdot(x,y)=xy$ tak dostaneme vyjádření nejmenších společných násobků ve tvaru

$$[a,b]=\frac{6x\cdot 10y}{2}=30xy,\quad [a,c]=\frac{6x\cdot 15z}{3}=30xz,\quad [b,c]=\frac{10y\cdot 15z}{5}=30yz.$$

Z rovnosti $\{30xy,30xz,30yz\}=\{60,90,180\}$ upravené na $\{xy,xz,yz\}=\{2,3,6\}$ pak díky tomu, že 2 a 3 jsou prvočísla, vyplývá $\{x,y,z\}=\{1,2,3\}$. Protože z podmínky $5=(b,c)=(10y,15z)$ plyne $y\neq 3$ a $z\neq 2$, připadají v úvahu pouze trojice (x,y,z) rovné $(1,2,3)$, $(2,1,3)$ a $(3,2,1)$, kterým po řadě odpovídají trojice (a,b,c) rovné $(6,20,45)$, $(12,10,45)$, $(18,20,15)$. Zkouškou se přesvědčíme, že všechny tři vyhovují množinové rovnosti ze zadání úlohy.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Určete, pro která přirozená čísla a, b platí $(a,b)=10$ a zároveň $[a,b]=150$. [$\{a,b\}=\{10,150\}$ nebo $\{a,b\}=\{30,50\}$. Protože $10=2\cdot 5$ a $150=2\cdot 3\cdot 5^2$, požadované rovnosti jsou splněny, právě když $a=2\cdot 3^s\cdot 5^t$ a $b=2\cdot 3^u\cdot 5^v$, kde $\{s,u\}=\{0,1\}$ a $\{t,v\}=\{1,2\}$.]
2. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b platí vztah $[a,b]\cdot(a,b)=ab$. [Podle úvahy o počtech zastoupení každého prvočísla v číslech a, b, (a,b) a $[a,b]$ stačí vysvětlit, proč pro jakákoliv čísla α, β platí rovnost $\min\{\alpha,\beta\}+\max\{\alpha,\beta\}=\alpha+\beta$. K tomu stačí rozlišit případy $\alpha<\beta$, $\alpha=\beta$ a $\alpha>\beta$. Jiné řešení: Nechť $d=(a,b)$, potom $a=xd$, $b=yd$ pro nesoudělná x a y, odkud plyne $[a,b]=xyd$, takže oba součiny $[a,b]\cdot(a,b)$ a ab se rovnají číslu xyd^2.]
3. Najděte všechny trojice a, b, c přirozených čísel, pro které současně platí $(ab,c)=2^8$, $(bc,a)=2^9$ a $(ca,b)=2^{11}$. [50–C–S–1]
4. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro které platí $a+b+[a,b]+(a,b)=50$. [50–C–II–1]
5. Pro libovolná přirozená čísla a, b dokažte nerovnost $a\cdot(a,b)+b\cdot[a,b]\geqq 2ab$. Zjistěte rovněž, kdy v této nerovnosti nastane rovnost. [60–C–I–5]

4. *Reálná čísla a, b, c, d vyhovují rovnici $ab+bc+cd+da=16$.*
a) Dokažte, že mezi čísly a, b, c, d se najdou dvě se součtem nejvýše 4.
b) Jakou nejmenší hodnotu může mít součet $a^2+b^2+c^2+d^2$?

Řešení. a) Z rovnosti $16=ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)$ plyne, že oba součty $a+c$ a $b+d$ nemohou být větší než 4 zároveň. Proto vždy aspoň jeden ze součtů $a+c$ či $b+d$ má požadovanou vlastnost.

b) Využijme obecnou rovnost

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\tfrac{1}{2}(a-b)^2+\tfrac{1}{2}(b-c)^2+\tfrac{1}{2}(c-d)^2+\tfrac{1}{2}(d-a)^2+ab+bc+cd+da,$$

o jejíž platnosti se snadno přesvědčíme úpravou pravé strany. Vzhledem k nezápornosti druhých mocnin $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-d)^2$ a $(d-a)^2$ dostáváme pro levou stranu rovnosti odhad

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqq ab+bc+cd+da=16.$$

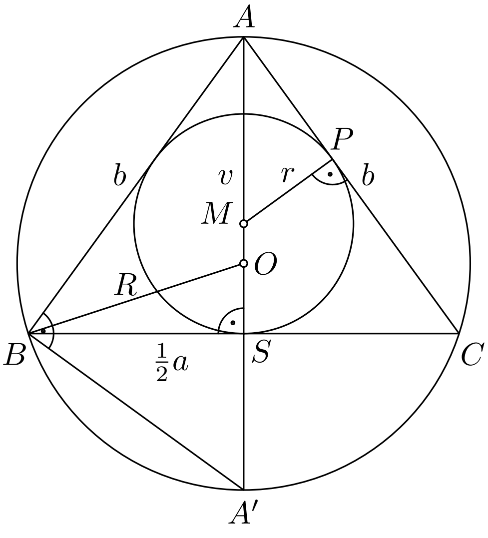
Je nalezené číslo 16 nejmenší hodnotou uvažovaných součtů? Jinak řečeno: nastane pro některou vyhovující čtveřici v odvozené nerovnosti rovnost? Z našeho postupu je jasné, že musíme rozhodnout, zda pro některou z uvažovaných čtveřic platí $a-b=b-c=c-d=d-a=0$ neboli $a=b=c=d$. Pro takovou čtveřici má rovnost $ab+bc+cd+da=16$ tvar $4a^2=16$, čemuž vyhovuje $a=\pm 2$. Pro vyhovující čtveřice $a=b=c=d=2$ a $a=b=c=d=-2$ má tak součet $a^2+b^2+c^2+d^2$ skutečně hodnotu 16, proto jde o hledané minimum.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Splňují-li reálná čísla x, y, z rovnici $x^2+y^2=z^2$, pak aspoň jedno z čísel $|x+z|$, $|x-z|$ nepřevyšuje hodnotu $|y|$. Dokažte. [Kdyby $|x+z|$, $|x-z|$ byla dvě (kladná) čísla větší než $|y|$, bylo by číslo $|x+z|\cdot|x-z|$ větší než $|y|^2$, podle zadání však jde o dvě stejná čísla.]
2. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla. Ukažte, že čísla $x+y+z-xyz$ a $xy+yz+zx-3$ nemohou být záporná současně. [60–C-II–4]
3. Je dáno přirozené číslo n ($n \geqq 2$) a reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pro která platí $x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1$. Dokažte nerovnost $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqq n$. [55–C–I–4]
4. Splňují-li reálná čísla a, b, c, d rovnosti $a^2+b^2=b^2+c^2=c^2+d^2=1$, platí nerovnost $ab+ac+ad+bc+bd+cd \leqq 3$. Dokažte a zjistěte, kdy přitom nastane rovnost. [55–C–II–2]
5. Dokažte, že nerovnost $(a^2+1)(b^2+1)-(a-1)^2(b-1)^2 \geqq 4$ platí pro libovolná čísla a, b z intervalu $\langle 1,\infty)$. Zjistěte, kdy nastane rovnost. [59–C–II–2]
6. Dokažte, že nerovnost $(a+bc)(b+ac) \geqq ab(c+1)^2$ platí pro libovolná nezáporná čísla a, b, c. Zjistěte, kdy nastane rovnost. [58–C–S–1]
7. Nerovnosti $\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ dokažte pro libovolná různá kladná čísla a, b. [58–C–I–6]
8. Nechť a, b, c jsou reálná čísla, jejichž součet je 6. Dokažte, že aspoň jedno z čísel $ab+bc$, $bc+ca$ nebo $ca+ab$ není větší než 8. [60–B–I–3]

5. *Je dán rovnoramenný trojúhelník se základnou délky a a rameny délky b. Pomocí nich vyjádřete poloměr R kružnice opsané a poloměr r kružnice vepsané tomuto trojúhelníku. Pak ukažte, že platí $R \geqq 2r$, a zjistěte, kdy nastane rovnost.*

Řešení. Označme S střed základny BC daného rovnoramenného trojúhelníku ABC, O střed jeho opsané kružnice, M střed vepsané kružnice a P patu kolmice z bodu M na rameno AC (obr. 2).



Obr. 2

Z pravoúhlého trojúhelníku BSA umíme pomocí Pythagorovy věty vyjádřit velikost v výšky AS, přičemž v pravoúhlém trojúhelníku BSO s přeponou délky R pro odvěsnu OS platí $|OS| = \big||AS|-|AO|\big| = |v-R|$ (musíme si uvědomit, že v tupoúhlém trojúhelníku ABC bude bod S ležet mezi body A a O!). Dostáváme tak dvě rovnosti

$$v^2 = b^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + (v-R)^2,$$

jejichž sečtením vyjde

$$v^2 + R^2 = b^2 + (v - R)^2 \quad \text{neboli} \quad b^2 = 2vR.$$

Dosazením z první rovnice $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ do poslední rovnosti dostaneme hledaný vzorec pro R.

Dodejme, že rovnost $b^2 = 2vR$, kterou jsme právě odvodili a z níž už snadno plyne kýžený vzorec pro poloměr R, je Eukleidovou větou o odvěsně AB pravoúhlého trojúhelníku ABA' s přeponou AA', jež je průměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC (obr. 2).

Nalezený vzorec pro poloměr R zapíšeme přehledně spolu s druhým hledaným vzorcem pro poloměr r, jehož odvození se teprve budeme věnovat:

$$R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \quad \text{a} \quad r = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}. \tag{$*$}$$

Druhý ze vzorců $(*)$ lze získat okamžitě ze známého vztahu $r = 2S/(a + b + c)$ pro poloměr r kružnice vepsané do obecného trojúhelníku o stranách a, b, c a obsahu S; v našem případě stačí pouze dosadit $b = c$ a $2S = av$, kde $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ podle úvodní části řešení.

Další dva způsoby odvození druhého ze vzorců $(*)$ založíme na úvaze o pravoúhlém trojúhelníku AMP, jehož strany mají délky

$$|AM| = v - r, \quad |MP| = r, \quad |AP| = |AC| - |PC| = b - |SC| = b - \frac{a}{2}.$$

Pro tento trojúhelník můžeme zapsat Pythagorovu větu, nebo využít jeho podobnost s trojúhelníkem ACS, konkrétně zapsat rovnost sinů jejich společného úhlu při vrcholu A. Podle toho dostaneme rovnice

$$(v - r)^2 = r^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad \frac{r}{v - r} = \frac{\frac{1}{2}a}{b},$$

jež jsou, jak snadno nahlédneme, obě lineární vzhledem k neznámé r a mají řešení

$$r = \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad r = \frac{av}{a + 2b}.$$

Po dosazení za v v obou případech obdržíme kýžený vzorec pro r. Ve druhém případě je to zřejmé, v prvním to předvedeme:

$$\begin{aligned} r &= \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{v^2 - b^2 + ab - \frac{1}{4}a^2}{2v} = \frac{2ab - a^2}{4v} = \\ &= \frac{a(2b - a)}{2\sqrt{(2b - a)(2b + a)}} = \frac{a\sqrt{2b - a}}{2\sqrt{2b + a}} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}. \end{aligned}$$

Ještě zbývá dokázat nerovnost $R \geqq 2r$. Využijeme k tomu odvozených vzorců $(*)$, ze kterých dostáváme (připomínáme, že $2b > a > 0$)

$$\frac{R}{2r} = R \cdot \frac{1}{2r} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \cdot \frac{a + 2b}{a\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{b^2}{a(2b - a)}.$$

Nerovnost $R \geqq 2r$ tudíž platí, právě když $b^2 \geqq a(2b - a)$. Poslední nerovnost je ovšem ekvivalentní s nerovností $(a-b)^2 \geqq 0$, jejíž platnost je už zřejmá. Tím je důkaz nerovnosti $R \geqq 2r$ hotov. Navíc vidíme, že rovnost v ní nastane jedině v případě, kdy $(a - b)^2 = 0$ neboli $a = b$, tedy právě když je výchozí trojúhelník nejen rovnoramenný, ale i rovnostranný.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Pro obecný trojúhelník ABC o stranách a, b, c a obsahu S platí pro poloměr r kružnice vepsané vzorec $r = 2S/(a+b+c)$. Dokažte. [Střed M vepsané kružnice rozděluje uvažovaný trojúhelník ABC na tři menší trojúhelníky BCM, ACM, ABM o obsazích $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, jejichž součet se rovná S, odkud plyne dokazovaný vzorec.]
2. Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ mají vnitřní dotyk v bodě B. Určete délky stran trojúhelníku ABC, kde bod A je průsečík přímky OB s kružnicí k a bod C je průsečík kružnice k s tečnou z bodu A ke kružnici l. [59–C–S–2]
3. Kružnice $l(T; s)$ prochází středem kružnice $k(S; 2\,\mathrm{cm})$. Kružnice $m(U; t)$ se vně dotýká kružnic k a l, přičemž $US \perp ST$. Poloměry s a t vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Určete je. [59–B–II–1]
4. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A, B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D, E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC. [58–C–I–2]
5. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB a obsahem S je opsána kružnice. Tečna k této kružnici v bodě C protíná tečny vedené body A a B v bodech D a E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délky c přepony a obsahu S. [58–C–II–4]
6. Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD lze vepsat kružnici se středem O. Určete obsah S lichoběžníku, jsou-li dány délky úseček OB a OC. [56–C–II–3]
7. Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou $3\,\mathrm{cm}$ a $12\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte poloměr kružnice m. Najděte všechna řešení. [55–C–I–2]
8. Kružnice k, l s vnějším dotykem leží obě v obdélníku $ABCD$, jehož obsah je $72\,\mathrm{cm}^2$. Kružnice k se přitom dotýká stran CD, DA a AB, zatímco kružnice l se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry kružnic k a l, jestliže poloměr kružnice k je v centimetrech vyjádřen celým číslem. [55–C–II–3]

6. *Na hrací desce $n \times n$ tvořené bílými čtvercovými poli se Markéta a Tereza střídají v tazích jedním kamenem při následující hře. Nejprve Markéta umístí kámen na libovolné pole a toto pole obarví modře. Dále vždy hráčka, která je na tahu, provede s kamenem skok na pole, které je dosud bílé, a toto pole obarví modře. Přitom skokem rozumíme obvyklý tah šachovým jezdcem, tj. přesun kamene o dvě pole svisle nebo vodorovně a současně o jedno pole v druhém směru. Hráčka, která je na řadě a již nemůže táhnout, prohrává. Postupně pro $n = 4, 5, 6$ rozhodněte, která z hráček může hrát tak, že vyhraje nezávisle na tazích druhé hráčky.*

Řešení. Je-li celkový počet polí hrací desky sudý (v zadání pro $n = 4$ a $n = 6$), může v pořadí druhá hráčka pomýšlet na takovou vítěznou strategii: spárovat všechna pole hrací desky do dvojic tak, aby v každém páru byla pole navzájem dosažitelná jedním skokem. Pokud takové spárování polí druhá hráčka najde, má vítěznou strategii: v každém tahu provede skok na druhé pole téhož páru, na jehož prvním poli kámen právě leží.

Je-li celkový počet polí hrací desky lichý (v zadání pro $n = 5$), může v pořadí první hráčka pomýšlet na takovou vítěznou strategii: spárovat všechna pole hrací desky kromě jednoho do dvojic tak, aby v každém páru byla pole navzájem dosažitelná jedním skokem. Pokud takové spárování první hráčka najde, má vítěznou strategii: v prvním tahu položí kámen na (jediné) nespárované pole a v každém dalším tahu provede skok na druhé pole téhož páru, na jehož prvním poli kámen právě leží.

Najít požadovaná spárování polí je pro zadané příklady snadné a je to možné udělat více způsoby. Ukažme ty z nich, které nesou určité rysy pravidelnosti. Na obr. 3 zleva je vidět, jak je možné spárovat pole části hrací desky o rozměrech 4×2; celou hrací desku 4×4 rozdělíme na dva takové bloky a provedeme spárování v každém z nich. I ke spárování polí hrací desky 6×6 lze využít spárování ve dvou blocích 4×2; na obr. 3 uprostřed je vidět možné středově souměrné spárování všech polí. Konečně na obr. 3 vpravo je příklad spárování polí hrací desky 6×6 s nespárovaným polem v levém horním rohu (nespárované pole nemusí být nutně rohové); opět je přitom využit jeden blok 4×2.

1	2
3	4
2	1
4	3

1	2	E'	A'	D'	B'
3	4	D'	B'	C'	A'
2	1	C'	E'	$3'$	$4'$
4	3	E	C	$1'$	$2'$
A	C	B	D	$4'$	$3'$
B	D	A	E	$2'$	$1'$

•	A	B	C	D
1	2	E	A	B
3	4	C	D	F
2	1	G	E	H
4	3	H	F	G

Obr. 3

Návodné a doplňující úlohy:

1. Řešte jednodušší variantu zadaného příkladu, kdy povolené *skoky* jsou tahy šachovou věží, tj. přesuny kamene ve směru řádků nebo ve směru sloupců hrací desky (o libovolný počet polí). Dokážete objevit vítěznou strategii pro tuto variantu hry v případě hrací desky libovolných rozměrů $m \times n$? [Jsou-li obě čísla m a n lichá, má vítěznou strategii první hráčka, je-li aspoň jedno z čísel m, n sudé, má vítěznou strategii druhá hráčka. V obou případech si zmíněná hráčka předem v duchu rozdělí všechna pole hrací desky do dvojic (v prvním případě jedno pole zbyde, na ně pak hráčka položí kámen v úvodním tahu), a to tak, aby v každém sestaveném páru byla pole navzájem dosažitelná jedním skokem (pro tahy věží je to snadné, stačí párovat pouze sousední pole téhož řádku nebo sloupce); v průběhu hry pak tato hráčka může vždy táhnout z jednoho pole na druhé pole téhož páru, takže vyhraje.]
2. Na tabuli jsou napsána všechna prvočísla menší než 100. Markéta a Tereza se střídají v tazích při následující hře. Nejprve Markéta smaže jedno z prvočísel. Dále vždy hráčka, která je na tahu, smaže jedno z prvočísel, které má s předchozím smazaným prvočíslem jednu shodnou číslici (tak po prvočíslu 3 lze smazat třeba 13 nebo 37). Hráčka, která je na tahu a nemůže již žádné prvočíslo smazat, prohrává. Která z obou hráček může hrát tak, že vyhraje nezávisle na tazích druhé hráčky? [Protože prvočísel menších než 100 je lichý počet (25), nabízí se hypotéza, že vítěznou strategii bude mít první hráčka. Ukažme, že je tomu skutečně tak. Tato hráčka si předem v duchu spáruje (podle společné číslice) napsaná prvočísla (lze to provést mnoha způsoby, uveďme ten, kdy v každém kroku párujeme nejmenší dosud nespárované prvočíslo s nejmenším dalším dosud nespárovaným prvočíslem o společné číslici): $(2, 23)$, $(3, 13)$, $(5, 53)$, $(7, 17)$, $(11, 19)$, $(29, 59)$, $(31, 37)$, $(41, 43)$, $(47, 67)$, $(61, 71)$, $(73, 79)$, $(83, 89)$; jediné zbylé nespárované prvočíslo 97 proto hráčka smaže jako první a dále při hře bude mazat vždy prvočíslo, které je ve stejném páru s předchozím smazaným prvočíslem. Tímto postupem musí vyhrát.]
3. Dvě hráčky mají k dispozici pro hru, kterou popíšeme, neomezený počet pětikorun a stůl s kruhovou deskou o průměru 1 metr. Hra probíhá tak, že se hráčky pravidelně střídají v tazích. Nejprve první hráčka položí jednu pětikorunu na prázdný stůl kamkoliv. Dále vždy hráčka, která je na tahu, položí na volnou část stolu další pětikorunu (tak, aby nepřesahovala okraj stolu a aby se dříve uložených pětikorun nejvýše dotýkala). Která z obou hráček může hrát tak, že vyhraje nezávisle na tazích druhé hráčky? [Vítěznou strategii má první hráčka: první minci položí doprostřed stolu a v každém dalším kroku položí minci na místo souměrně sdružené podle středu stolu s místem právě položené mince.]