61. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y + 3x &= 4x^3, \\ x + 3y &= 4y^3. \end{aligned}$$

2. V rovině uvažujme lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD a označme M střed jeho úhlopříčky AC. Dokažte, že platí: Mají-li trojúhelníky ABM a ACD stejné obsahy, jsou přímky DM a BC rovnoběžné.

3. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je součin $(2^n + 1)(3^n + 2)$ dělitelný číslem 5^n.

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 6. prosince 2011

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

61. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Sečtením, resp. odečtením obou rovnic a úpravou dostaneme

$$4(x+y) = 4(x^3+y^3),$$
$$2(x-y) = 4(x^3-y^3),$$

neboli

$$\begin{aligned} x+y &= (x+y)(x^2-xy+y^2),\\ x-y &= (x-y)(x^2+xy+y^2). \end{aligned} \tag{1}$$

Jestliže $x+y=0$, dostaneme dosazením $y=-x$ například do první rovnice původní soustavy $2x=4x^3$, tedy po úpravě $x(2x^2-1)=0$. Tato rovnice má zřejmě kořeny $x=0$ a $x=\pm\frac12\sqrt2$, dostáváme tak tři řešení soustavy: uspořádané dvojice $(0,0)$, $\left(\frac12\sqrt2,-\frac12\sqrt2\right)$ a $\left(-\frac12\sqrt2,\frac12\sqrt2\right)$.

Jestliže $x-y=0$, dostaneme dosazením $y=x$ do první rovnice $4x=4x^3$, tedy $x(x^2-1)=0$. Tato rovnice má zřejmě kořeny $x=0$ a $x=\pm1$. Pro $x=0$ dostaneme už dříve objevené řešení $(0,0)$, pro $x=\pm1$ získáme další dvě řešení soustavy $(1,1)$ a $(-1,-1)$.

Zbývá rozebrat případ, kdy jsou oba výrazy $x+y$, $x-y$ nenulové. Za této podmínky můžeme rovnice odvozené na začátku uvedenými výrazy vydělit, načež dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= x^2-xy+y^2,\\ \tfrac12 &= x^2+xy+y^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Jejich sčítáním, resp. odčítáním vyjde $x^2+y^2=\frac34$ a $xy=-\frac14$. Dostáváme tak

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = \tfrac34-\tfrac12=\tfrac14,$$

tedy $x+y=\frac12$ nebo $x+y=-\frac12$. Hodnoty neznámých x, y umíme potom určit (podle Viètových vztahů) řešením kvadratických rovnic

$$t^2-\tfrac12t-\tfrac14=0, \qquad \text{resp.} \qquad t^2+\tfrac12t-\tfrac14=0.$$

Protože jejich kořeny jsou $t_{1,2}=\frac14\pm\frac14\sqrt5$, resp. $t_{3,4}=-\frac14\pm\frac14\sqrt5$, dostáváme čtyři řešení dané soustavy: (t_1,t_2), (t_2,t_1), (t_3,t_4), (t_4,t_3).

Závěr. Soustava má celkem 9 různých řešení, jsou jimi uspořádané dvojice

$$\begin{gathered} (0,0),\ \left(\tfrac12\sqrt2,-\tfrac12\sqrt2\right),\ \left(-\tfrac12\sqrt2,\tfrac12\sqrt2\right),(1,1),\ (-1,-1),\\ \left(\tfrac14+\tfrac14\sqrt5,\tfrac14-\tfrac14\sqrt5\right),\ \left(\tfrac14-\tfrac14\sqrt5,\tfrac14+\tfrac14\sqrt5\right),\\ \left(-\tfrac14+\tfrac14\sqrt5,-\tfrac14-\tfrac14\sqrt5\right),\ \left(-\tfrac14-\tfrac14\sqrt5,-\tfrac14+\tfrac14\sqrt5\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Z uvedeného postupu plyne, že všechny dvojice splňují původní soustavu, zkouška proto není nutná.

Jiné řešení. Nechť (x, y) je řešením dané soustavy. Kdyby bylo $|x| > 1$, vyjde z první rovnice $|y| = |x||4x^2 - 3| > |x|$, neboť $4x^2 - 3 > 1$. Budeme tedy mít $|y| > |x| > 1$ a z druhé rovnice pak díky odvozené nerovnosti $|y| > 1$ úplně stejně odvodíme $|x| > |y|$, což dává spor. Proto $-1 \leqq x \leqq 1$ a v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ existuje t takové, že $x = \cos t$. Dosazením do první rovnice dostaneme $y = 4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$,[1] z druhé potom podobně $x = 4\cos^3 3t - 3\cos 3t = \cos 9t$. Musí proto platit $\cos t = \cos 9t$, odkud po úpravě

$$\begin{aligned} \cos t - \cos 9t &= 0, \\ 2 \sin \frac{9t + t}{2} \sin \frac{9t - t}{2} &= 0, \\ \sin 5t \sin 4t &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Poslední rovnost je splněna, právě když $5t$ nebo $4t$ je násobkem čísla π. To spolu s podmínkou $0 \leqq t \leqq \pi$ dává řešení tvaru $(\cos t, \cos 3t)$ pro

$$t \in \left\{0, \tfrac{1}{5}\pi, \tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{2}{5}\pi, \tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{5}\pi, \tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{4}{5}\pi, \pi\right\}.$$

Ani v tomto případě není zkouška nutná.

Jiné řešení. Vyjádřením $y = 4x^3 - 3x$ z první rovnice a dosazením za y do druhé postupně dostaneme

$$\begin{aligned} x + 3(4x^3 - 3x) &= 4(4x^3 - 3x)^3, \\ 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 8x &= 0, \\ x(32x^8 - 72x^6 + 54x^4 - 15x^2 + 1) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Mnohočlen v závorce po substituci $x^2 = z$ přejde v mnohočlen čtvrtého stupně $32z^4 - 72z^3 + 54z^2 - 15z + 1$, který můžeme rozložit na součin tak, že uhodneme jeho kořeny $z = 1$ a $z = \frac{1}{2}$ a následně ho vydělíme příslušnými kořenovými činiteli. Odvozená rovnice pro neznámou x tak přejde do tvaru

$$2x(x^2 - 1)(x^2 - \tfrac{1}{2})(16x^4 - 12x^2 + 1) = 0.$$

Vyřešením bikvadratické rovnice $16x^4 - 12x^2 + 1 = 0$ (například substitucí $x^2 = z$) už snadno určíme všechna řešení. Jsou jimi

$$x \in \left\{0,\ \pm 1,\ \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \pm\sqrt{\tfrac{3}{8} \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{5}}\right\}$$

(jen je nutné se přesvědčit, že výraz pod odmocninou je pro obě znaménka kladný). Ke každé z uvedených devíti hodnot x už snadno dopočítáme řešení tvaru $(x, 4x^3 - 3x)$, zkouška opět vzhledem k uvedenému postupu není nutná.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, a to i v případě, že řešení nejsou uvedena přesně ve tvaru (3); stačí i tvar jako při druhém anebo třetím uvedeném postupu anebo jakýkoli jiný podobný zápis obsahující všech 9 řešení.

---

[1] Na odvození rovnosti $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ stačí použít známý vzorec $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

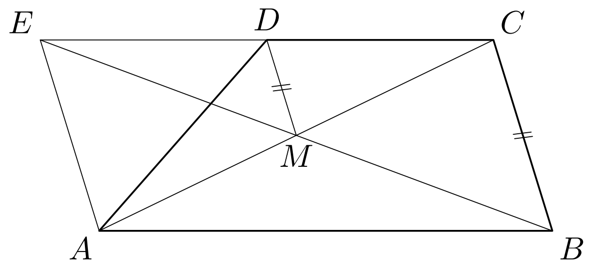
Při postupu jako v prvním uvedeném řešení dejte po jednom bodu za každý z rozkladů v (1) a po jednom bodu za rozbor situace $x+y=0$, resp. $x-y=0$, dohromady však nejvýše 3 body. Čtvrtý bod dejte za přepis do soustavy (2), pátý bod za určení obou hodnot $x+y=\frac{1}{2}$ a $xy=-\frac{1}{4}$ a šestý bod za správné vyřešení kvadratických rovnic.

Při druhém postupu dejte 1 bod za důkaz, že $-1 \leqq x \leqq 1$, další bod dejte za substituci $x=\cos t$. Třetí bod je za odvození $y=\cos 3t$, čtvrtý bod za rovnici $\cos t=\cos 9t$ a poslední 2 body za její úplné vyřešení v intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ (tyto 2 body je možno rozdělit, např. za odvození (4) bez následného vyřešení je možno udělit pátý bod).

Při třetím postupu jen za vyjádření $y=4x^3-3x$ a dosazení do druhé rovnice bez další úpravy nedávejte žádný bod – první bod dejte až za bezchybnou úpravu na tvar (5). Po jednom bodu dejte za nalezení každého z činitelů x, (x^2-1), $(x^2-\frac{1}{2})$ (resp. za nalezení příslušných kořenů a snížení stupně mnohočlenu, jehož kořeny hledáme). Poslední dva body dejte za vyřešení bikvadratické rovnice.

Jestliže žák (při jakémkoli správném postupu) nenajde všech 9 řešení, dejte nejvýše 5 bodů. Tolik dejte i v případě, že žák řeši soustavu důsledkovými (neekvivalentními) úpravami (tj. z jeho postupu jednoduše nevyplývá, že nalezená řešení vskutku splňují původní soustavu), najde všechna řešení, ale neudělá zkoušku. (Bod za chybějící zkoušku strhněte jen v případě, že jinak je postup bezchybný.)

2. Úsečka BM je těžnicí trojúhelníku ABC (obr. 1), dělí ho tedy na dva trojúhelníky se stejným obsahem. Podle zadání má jeden z těchto trojúhelníků stejný obsah jako trojúhelník ACD. Proto má trojúhelník ABC dvakrát větší obsah než trojúhelník ACD. Oba trojúhelníky mají přitom shodné výšky na strany AB resp. CD (shodné s výškou uvažovaného lichoběžníku). S ohledem na jejich obsahy tedy platí $|AB|=2|CD|$.



Obr. 1

Na přímce CD uvažujme takový bod E, že D je středem úsečky CE. Z odvozené rovnosti $|AB|=2|CD|$ plyne shodnost úseček CE a AB. Čtyřúhelník $ABCE$ je proto rovnoběžník a bod M (jako střed jeho úhlopříčky AC) je současně středem i jeho úhlopříčky BE. Úsečka DM je tedy střední příčkou trojúhelníku BCE, je tudíž rovnoběžná s jeho stranou BC, což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Rovnoběžnost přímek DM a BC lze obdobně dokázat využitím středu F základny AB uvažovaného lichoběžníku $ABCD$ (tím vznikne rovnoběžník $AFCD$).

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za pozorování, že trojúhelník ABC má oproti trojúhelníku ACD dvojnásobný obsah (či analogicky trojúhelníky AFM a CDM mají stejné obsahy), další 2 body za odvození rovnosti $|AB|=2|CD|$ (anebo rovnosti $|AF|=|CD|$ plynoucí z toho, že trojúhelníky AFM a CDM mají shodné výšky z vrcholu M), 1 bod za objev rovnoběžníku $ABCE$ (anebo rovnoběžníku $AFCD$) a poslední bod za důkaz rovnoběžnosti DM, BC.

3. Zkoumejme, pro které hodnoty n jsou jednotlivé činitele zadaného součinu dělitelné pěti. Vypišme činitele pro malé hodnoty n a vypišme též jejich zbytky při dělení pěti:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
2^n+1	3	5	9	17	33	65	129	257	...
zbytek po dělení 5	3	0	4	2	3	0	4	2	...
3^n+2	5	11	29	83	245	731	2 189	6 563	...
zbytek po dělení 5	0	1	4	3	0	1	4	3	...

Jak lze uhodnout z tabulky, posloupnost zbytků činitele 2^n+1 při dělení pěti je tvořena čtveřicí 3, 0, 4, 2, jež se periodicky opakuje. Dokázat to můžeme například tak, že ukážeme, že čísla 2^n+1 a $2^{n+4}+1$ dávají pro každé přirozené n při dělení pěti stejný zbytek, tedy že jejich rozdíl je dělitelný pěti:

$$(2^{n+4}+1)-(2^n+1)=2^{n+4}-2^n=2^n(2^4-1)=5\cdot 3\cdot 2^n.$$

Podobně posloupnost zbytků činitele 3^n+2 při dělení pěti tvoří periodicky se opakující čtveřice 0, 1, 4, 3, neboť rozdíl

$$(3^{n+4}+2)-(3^n+2)=3^{n+4}-3^n=3^n(3^4-1)=5\cdot 16\cdot 3^n$$

je pro každé přirozené n dělitelný pěti.

Z uvedeného plyne, že 2^n+1 je dělitelné pěti jen pro $n=2,6,10,\ldots$, zatímco 3^n+2 je dělitelné pěti jen pro $n=1,5,9,\ldots$, takže pro žádné n nejsou pěti dělitelné oba činitele daného součinu. Aby byl tedy součin dělitelný číslem 5^n, musí jím být dělitelný jeden z činitelů. Avšak pro každé $n\geqq 2$ je zřejmě $5^n>3^n+2$ a též $5^n>2^n+1$, takže 5^n nemůže dělit ani jednoho z obou činitelů. Jedině pro $n=1$ máme $5^1=3^1+2$. Proto jediné vyhovující číslo je $n=1$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Po jednom bodu (dohromady dva body) dejte za objev posloupností zbytků po dělení pěti pro každý činitel (body udělte i v případě, že řešitel jen bez důkazu prohlásí, že posloupnosti jsou periodické, neboť tato skutečnost je dostatečně evidentní a známá), resp. za jakékoli správné zdůvodnění, že $5\mid 2^n+1$ jen pro n tvaru $4k+2$ a $5\mid 3^n+2$ jen pro n tvaru $4k+1$. Další dva body dejte za úvahu, že 5^n musí dělit jednoho z činitelů; pátý bod dejte za zdůvodnění, že pro $n\geqq 2$ to není možné (přitom zřejmé nerovnosti $5^n>3^n+2$ a $5^n>2^n+1$ není nutné zdůvodňovat); poslední bod pak za uvedení správné odpovědi $n=1$. Žák, který bez jakéhokoli zdůvodnění jen prohlásí, že jediné vyhovující je $n=1$, dostane 1 bod. Jestliže žák považuje za přirozené číslo i $n=0$ a uvede ho též v odpovědi, body nestrhávejte.