61. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž platí rovnost množin

$$\{a \cdot [a,b],\ b \cdot (a,b)\} = \{45, 180\},$$

kde (x,y) a $[x,y]$ značí po řadě největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel x a y.

2. Označme S střed základny AB daného rovnoramenného trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že kružnice vepsané trojúhelníkům ACS, BCS se dotýkají přímky AB v bodech, které dělí základnu AB na tři shodné díly. Vypočtěte poměr $|AB| : |CS|$.

3. Nechť reálná čísla p, q, r, s vyhovují rovnicím

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 4 \quad \text{a} \quad pq + rs = 1.$$

Dokažte, že některá dvě z těchto čtyř čísel se liší nejvýše o 1 a některá dvě se liší nejméně o 1.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

ve čtvrtek 26. ledna 2012

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

61. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. Z dané rovnosti předně plyne, že číslo b je liché (jinak by obě čísla nalevo byla sudá), a tedy číslo a je sudé (jinak by obě čísla nalevo byla lichá). Rovnost množin proto musí být splněna následovně:

$$a \cdot [a, b] = 180 \quad \text{a} \quad b \cdot (a, b) = 45. \tag{1}$$

Protože číslo a dělí číslo $[a, b]$, je číslo $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ dělitelné druhou mocninou (sudého) čísla a, takže musí platit buď $a = 2$, nebo $a = 6$. V případě $a = 2$ (s přihlédnutím k tomu, že b je liché) platí

$$a \cdot [a, b] = 2 \cdot [2, b] = 2 \cdot 2b = 4b,$$

což znamená, že první rovnost v (1) je splněna jedině pro $b = 45$. Tehdy $b \cdot (a, b) = 45 \cdot (2, 45) = 45$, takže je splněna i druhá rovnost v (1), a proto dvojice $a = 2$, $b = 45$ je řešením úlohy.

V případě $a = 6$ podobně dostaneme

$$a \cdot [a, b] = 6 \cdot [6, b] = 6 \cdot 2 \cdot [3, b] = 12 \cdot [3, b],$$

což znamená, že první rovnost v (1) je splněna, právě když $[3, b] = 15$. Tomu vyhovují jedině hodnoty $b = 5$ a $b = 15$. Z nich však pouze hodnota $b = 15$ splňuje druhou rovnost v (1), která je nyní tvaru $b \cdot (6, b) = 45$. Druhým řešením úlohy je tedy dvojice $a = 6$, $b = 15$, žádná další řešení neexistují.

Odpověď: Hledané dvojice jsou dvě, a to $a = 2$, $b = 45$ a $a = 6$, $b = 15$.

Jiné řešení. Označme $d = (a, b)$. Pak $a = ud$ a $b = vd$, kde u, v jsou nesoudělná přirozená čísla, takže $[a, b] = uvd$. Z rovností

$$a \cdot [a, b] = ud \cdot uvd = u^2vd^2 \quad \text{a} \quad b \cdot (a, b) = vd \cdot d = vd^2$$

vidíme, že číslo $a \cdot [a, b]$ je u^2-násobkem čísla $b \cdot (a, b)$, takže zadaná rovnost množin může být splněna jedině tak, jak jsme zapsali vztahy (1) v původním řešení. Ty nyní můžeme vyjádřit rovnostmi

$$u^2vd^2 = 180 \quad \text{a} \quad vd^2 = 45.$$

Platí proto $u^2 = \frac{180}{45} = 4$ neboli $u = 2$. Z rovnosti $vd^2 = 45 = 3^2 \cdot 5$ plyne, že je buď $d = 1$ (a $v = 45$), nebo je $d = 3$ (a $v = 5$). V prvním případě $a = ud = 2 \cdot 1 = 2$ a $b = vd = 45 \cdot 1 = 45$, ve druhém $a = ud = 2 \cdot 3 = 6$ a $b = vd = 5 \cdot 3 = 15$.

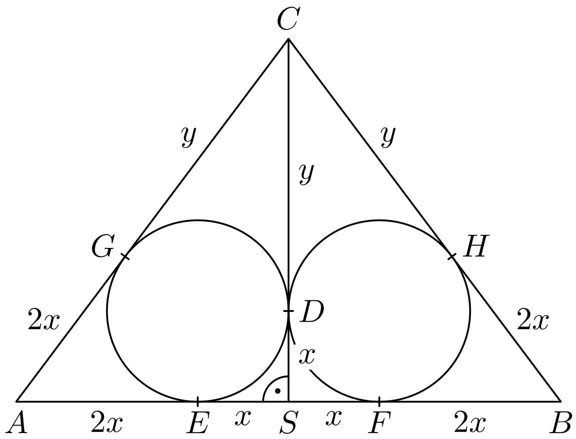
Poznámka. Protože ze zadané rovnosti okamžitě plyne, že obě čísla a, b jsou děliteli čísla 180 (takovým dělitelem je dokonce i jejich nejmenší společný násobek $[a, b]$), je možné podat úplné řešení různými jinými cestami, založenými na testování konečně mnoha dvojic konkrétních čísel a a b. Postup tohoto druhu urychlíme, když předem zjistíme některé nutné podmínky, jež musí čísla a, b splňovat. Tak například upřesnění rovnosti množin na dvojici rovností (1) lze (i bez užití úvahy o paritě čísel a, b) vysvětlit obecným postřehem: součin $a \cdot [a, b]$ je *vždy* dělitelný součinem $b \cdot (a, b)$, protože jejich podíl lze zapsat ve tvaru

$$\frac{a \cdot [a, b]}{b \cdot (a, b)} = \frac{a}{(a, b)} \cdot \frac{[a, b]}{b},$$

tedy jako součin dvou *celých* čísel.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Chybí-li zdůvodnění rovností (1) v jinak úplném řešení (argumenty $(a, b) < [a, b]$ či $(a, b) \mid [a, b]$ samy nestačí), strhněte 1 bod. Za nalezení obou vyhovujících dvojic (třeba uhodnutím) udělte 1 bod, další (nejvýše 3) body pak podle kvality podaného postupu hledání, zejména jeho systematičnosti.

2. Díky souměrnosti podle přímky CS se obě vepsané kružnice dotýkají výšky CS ve stejném bodě, který označíme D. Body dotyku těchto kružnic s úsečkami AS, BS, AC, BC označíme po řadě E, F, G, H (obr. 1). Pro vyjádření všech potřebných délek ještě zavedeme označení $x = |SD|$ a $y = |CD|$.



Obr. 1

S ohledem na symetrii tečen z daného bodu k dané kružnici platí rovnosti

$$|SD| = |SE| = |SF| = x \quad \text{a} \quad |CD| = |CG| = |CH| = y.$$

Úsečka EF má proto délku $2x$, jež je podle zadání rovněž délkou úseček AE a BF, a tedy i délkou úseček AG a BH (opět díky symetrii tečen). Odtud již bezprostředně plynou rovnosti

$$|AB| = 6x, \quad |AC| = |BC| = 2x + y \quad \text{a} \quad |CS| = x + y.$$

Závislost mezi délkami x a y zjistíme užitím Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ACS (s odvěsnou AS délky $3x$):

$$(2x + y)^2 = (3x)^2 + (x + y)^2.$$

Roznásobením a dalšími úpravami odtud dostaneme (x a y jsou kladné hodnoty)

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + y^2 &= 9x^2 + x^2 + 2xy + y^2, \\ 2xy &= 6x^2, \\ y &= 3x. \end{aligned}$$

Hledaný poměr tak má hodnotu

$$|AB| : |CS| = 6x : (x + y) = 6x : 4x = 3 : 2.$$

Poznamenejme, že prakticky stejný postup celého řešení lze zapsat i při standardním označení $c = |AB|$ a $v = |CS|$. Protože podle zadání platí $|AE| = \frac{1}{3}c$, a tudíž $|SE| = \frac{1}{6}c$, z rovnosti $|SD| = |SE|$ plyne $|CD| = |CS| - |SD| = v - \frac{1}{6}c$, odkud

$$|AC| = |AG| + |CG| = |AE| + |CD| = \tfrac{1}{3}c + (v - \tfrac{1}{6}c) = v + \tfrac{1}{6}c,$$

takže z Pythagorovy věty pro trojúhelník ACS

$$(v + \tfrac{1}{6}c)^2 = (\tfrac{1}{2}c)^2 + v^2$$

vychází $3v = 2c$ neboli $c : v = 3 : 2$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za vyjádření potřebných délek pomocí dvou parametrů (x, y nebo c, v) udělte 3 body, další 2 body přidejte za efektivní využití Pythagorovy věty a 1 bod za konečné určení hledaného poměru.

3. Druhá ze zadaných rovnic napovídá, že bychom měli zkoumat odchylky čísel ve dvojicích p, q a r, s. Pro součet druhých mocnin těchto odchylek platí

$$(p - q)^2 + (r - s)^2 = \left(p^2 + q^2 + r^2 + s^2\right) - 2(pq + rs) = 4 - 2 \cdot 1 = 2.$$

Je-li ovšem součet dvou reálných čísel roven číslu 2, nemohou být oba sčítanci ani větší než 1, ani menší než 1. Jedno z čísel $(p - q)^2$, $(r - s)^2$ je tedy nejvýše 1 a jedno je nejméně 1. Totéž pak platí i o číslech $|p - q|$ a $|r - s|$, což jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Určení součtu $(p-q)^2+(r-s)^2$ oceňte 4 body. Pokud řešitel při správné úvaze učiní závěr o číslech $p - q$ a $r - s$ bez absolutních hodnot (a nepoznamená přitom, že lze bez újmy předpokládat $p \geqq q$ a $r \geqq s$), strhněte 1 bod.