61. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Označme S_n součet všech n-místných čísel, jejichž desítkový zápis obsahuje pouze číslice 1, 2, 3, každou aspoň jednou. Najděte všechna celá $n \geqq 3$, pro něž je číslo S_n dělitelné sedmi.

2. Je dáno celé číslo a větší než 1. Najděte aritmetickou posloupnost s prvním členem a, jež obsahuje právě dvě z čísel a^2, a^3, a^4, a^5 a má co největší diferenci. (Nepředpokládáme, že diference je nutně celočíselná.)

3. Do kružnice je vepsán šestiúhelník $ABCDEF$, v němž platí $AB \perp BD$, $|BC| = |EF|$. Předpokládejme, že přímky BC, EF protnou polopřímku AD postupně v bodech P, Q. Označme S střed úhlopříčky AD a K, L středy kružnic vepsaných trojúhelníkům BPS, EQS. Dokažte, že trojúhelník KLD je pravoúhlý.

4. Předpokládejme, že pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$ab + cd = ac + bd = 4 \quad \text{a} \quad ad + bc = 5.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu součtu $a + b + c + d$ a zjistěte, které vyhovující čtveřice a, b, c, d ji dosahují.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 17. ledna 2012

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

61. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie A

1. Součet S_n najdeme tak, že zjistíme, kolikrát se která číslice nalézá ve všech uvažovaných číslech na místě jednotek, desítek, stovek atd. Potom určíme, jaký je „příspěvek“ jednotlivých číslic do celkového součtu.

Jestliže je číslice 1 na místě jednotek, můžeme zbylých $n-1$ pozic zaplnit 3^{n-1} způsoby (pro každou pozici máme tři možnosti). Takto jsme ale bohužel započítali i čísla složená jen z jedniček a dvojek, tedy čísla neobsahující *aspoň jednu* číslici 3; těch je zřejmě 2^{n-1}. Podobně nechceme započítat ani čísla složená jen z jedniček a trojek, kterých je rovněž 2^{n-1}. (Stále počítáme s číslicí 1 na místě jednotek.)[1] Protože číslo složené ze samých jedniček se nalézá v obou nesprávně započítaných skupinách (a žádné jiné takové číslo není), započítali jsme navíc $2 \cdot 2^{n-1} - 1$ čísel. Číslice 1 se tedy na místě jednotek nalézá k-krát, kde $k = 3^{n-1} - (2 \cdot 2^{n-1} - 1) = 3^{n-1} - 2^n + 1$.

Stejněkrát se nalézá číslice 1 i na každé další pozici (za stejných podmínek zaplňujeme vždy $n-1$ zbylých pozic). Pro příspěvek p číslice 1 do celkového součtu proto platí

$$p = k + 10k + 100k + \ldots + 10^{n-1}k = (1 + 10 + 100 + \ldots + 10^{n-1})k = \frac{10^n - 1}{9}\, k.$$

Příspěvek číslice 2, resp. 3 je zřejmě dvakrát, resp. třikrát větší než příspěvek číslice 1, protože na jednotlivých pozicích se obě tyto číslice objeví stejně často jako číslice 1. Dohromady máme

$$S_n = p + 2p + 3p = 6p = 6 \cdot \frac{10^n - 1}{9}\, k = \frac{2}{3}(10^n - 1)(3^{n-1} - 2^n + 1).$$

Toto číslo je dělitelné *prvočíslem* 7, právě když je jím dělitelný aspoň jeden z činitelů $10^n - 1$, $3^{n-1} - 2^n + 1$ (činitel $\frac{2}{3}$ dělitelnost sedmi zřejmě neovlivní). Vypíšeme činitele pro malé hodnoty n a vypíšeme též jejich zbytky při dělení sedmi.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$10^n - 1$	9	99	999	9 999	99 999	999 999	...	
zbytek při dělení 7	2	1	5	3	4	0	2	1
$3^{n-1} - 2^n + 1$	0	0	2	12	50	180	602	1 932
zbytek při dělení 7	0	0	2	5	1	5	0	0

Jak můžeme z tabulky uhádnout, posloupnost zbytků činitele $10^n - 1$ při dělení sedmi je tvořena šesticí 2, 1, 5, 3, 4, 0, která se periodicky opakuje.[2] Dokázat to můžeme například tak, že ukážeme, že čísla $10^n - 1$ a $10^{n+6} - 1$ dávají pro každé přirozené n při dělení sedmi stejný zbytek, tedy že jejich rozdíl je dělitelný sedmi:

$$(10^{n+6} - 1) - (10^n - 1) = 10^{n+6} - 10^n = 10^n(10^6 - 1) = 7 \cdot 142\,857 \cdot 10^n.$$

---

[1] Čísla mající na zbylých $n-1$ místech jen dvojky a trojky započítávat budeme, protože požadovanou aspoň jednu číslici 1 už mají na místě jednotek.

[2] Při vyplňování tabulky nemusíme pracně dělit sedmi čísla $10^n - 1$. Stačí využít, že 10^{n+1} dává při dělení sedmi stejný zbytek než 10-násobek *zbytku* čísla 10^n.

(Při poslední úpravě je možno se vyhnout přímému dělení a konstatovat, že z malé Fermatovy věty plyne $7 \mid 10^6 - 1$.)

Posloupnost zbytků činitele $3^{n-1} - 2^n + 1$ při dělení sedmi je rovněž periodická a tvoří ji opakující se šestice 0, 0, 2, 5, 1, 5, protože rozdíl

$$(3^{n+5} - 2^{n+6} + 1) - (3^{n-1} - 2^n + 1) = (3^{n+5} - 3^{n-1}) - (2^{n+6} - 2^n) = \\ = 3^{n-1}(3^6 - 1) - 2^n(2^6 - 1) = 7 \cdot (104 \cdot 3^{n-1} - 9 \cdot 2^n)$$

je pro každé přirozené n dělitelný sedmi.

Z uvedeného plyne, že S_n je dělitelné sedmi právě pro ta přirozené čísla $n \geqq 3$, která je možno zapsat ve tvaru $6m$, $6m+1$ anebo $6m+2$ pro nějaké přirozené číslo m, tedy pro čísla n dávající při dělení šesti zbytek 0, 1 nebo 2.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odvození vzorce pro výpočet S_n dejte 3 body; za kompletní analýzu, pro které n je $10^n - 1$, resp. $3^{n-1} - 2^n + 1$ dělitelné sedmi, dejte 1 bod, resp. 2 body.

Při analýze výrazu $10^n - 1$ udělte bod i v případě, že řešitel jen bez důkazu prohlásí, že posloupnost zbytků je periodická od prvního opakujícího se členu, neboť tato skutečnost je dostatečně evidentní a známá. Při výraze $3^{n-1} - 2^n + 1$ je periodičnost s periodou délky 6 nutné zdůvodnit (např. tak, jak je uvedeno v řešení, anebo samostatnou analýzou zbytků jednotlivých mocnin 3^{n-1} a 2^n), bez toho z uvedených dvou bodů jeden strhněte.

Jestliže žák nesprávně odvodí vzorec pro S_n tak, že započítá i čísla složená jen ze dvou různých číslic, tj. pracuje se vztahem $S_n = \frac{2}{3}(10^n - 1)3^{n-1}$, za první část udělte 1 bod (za správně určení jednotlivých příspěvků, resp. jiné odvození tohoto vztahu) a za druhou část též 1 bod (za správnou analýzu dělitelnosti sedmi výrazu $10^n - 1$), dohromady tedy nejvýše 2 body.

Jestliže žák odvodí vzorec ve tvaru $S_n = \frac{2}{3}(10^n - 1)(3^{n-1} - 2^n)$ (tj. nesprávně aplikuje princip inkluze a exkluze tím, že zapomene připočítat 1) a ten dále správně analyzuje, dejte za první část 1 bod a za druhou 2 body (po jednom za každého činitele), tedy dohromady nejvýše 3 body.

2. Aritmetická posloupnost $\mathcal{A}$ s prvním členem a a kladnou diferencí d obsahuje právě ta z čísel a^2, a^3, a^4, a^5, pro která je příslušný rozdíl

$$\begin{aligned} a^2 - a &= a(a-1), \\ a^3 - a &= a(a-1)(a+1), \\ a^4 - a &= a(a-1)(a^2+a+1), \\ a^5 - a &= a(a-1)(a+1)(a^2+1) \end{aligned} \tag{1}$$

celým násobkem čísla d. Předpokládejme, že $\mathcal{A}$ obsahuje právě dvě z čísel a^2, a^3, a^4, a^5.

Jestliže $a^2 \in \mathcal{A}$, je první rozdíl $a(a-1)$ celým násobkem d. Protože číslo a je celé, jsou i zbylé tři rozdíly v (1) (které jsou zřejmě celočíselnými násobky prvního rozdílu) celými násobky d. To však znamená, že $\mathcal{A}$ obsahuje všechna čísla a^2, a^3, a^4, a^5, což odporuje požadavkům úlohy. Proto $a^2 \notin \mathcal{A}$, tudíž $\mathcal{A}$ obsahuje právě dvě z čísel a^3, a^4, a^5.

Jestliže $a^3 \notin \mathcal{A}$ neboli $a^4, a^5 \in \mathcal{A}$, jsou oba výrazy

$$\frac{a^4 - a}{d}, \qquad \frac{a^5 - a}{d}$$

celočíselné. Potom je celým číslem i jejich kombinace

$$\frac{a^5 - a}{d} - a \cdot \frac{a^4 - a}{d} = \frac{a^2 - a}{d},$$

tedy $a^2 \in \mathcal{A}$, což vede, jak už víme, ke sporu. Proto $a^3 \in \mathcal{A}$.

Dokázali jsme, že hledaná aritmetická posloupnost $\mathcal{A}$ musí obsahovat číslo a^3. Pro její diferenci d pak platí odhad $d \leqq a^3 - a$, přičemž rovnost nastane (tj. diference bude největší) v případě, že a^3 je jejím druhým členem. Aritmetická posloupnost s prvním členem a a diferencí $d = a^3 - a$ určitě neobsahuje číslo a^2, obsahuje a^3 a obsahuje i $a + (a^2 + 1)(a^3 - a) = a^5$. Stačí už jen ověřit, že neobsahuje a^4. To plyne z toho[3], že výraz

$$\frac{a^4 - a}{d} = \frac{a^4 - a}{a^3 - a} = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1} = a + \frac{1}{a + 1}$$

není celým číslem pro žádné kladné celé číslo a.

Závěr. Hledaná posloupnost je aritmetická posloupnost s prvním členem a a diferencí $d = a^3 - a$.

Poznámka. Jestliže uhodneme výsledek a ukážeme, že posloupnost s diferencí $d = a^3 - a$ obsahuje a^3, a^5 a neobsahuje a^2, a^4, stačí už na dokončení řešení ukázat jen to, že diference žádné vyhovující posloupnosti $\mathcal{A}$ nemůže být větší než $a^3 - a$. Kdyby větší byla, nemohla by posloupnost $\mathcal{A}$ obsahovat a^2 ani a^3, a musela by tedy obsahovat a^4 i a^5. Odtud stejně jako v uvedeném řešení můžeme odvodit $a^2 \in \mathcal{A}$, čímž dojdeme ke sporu.

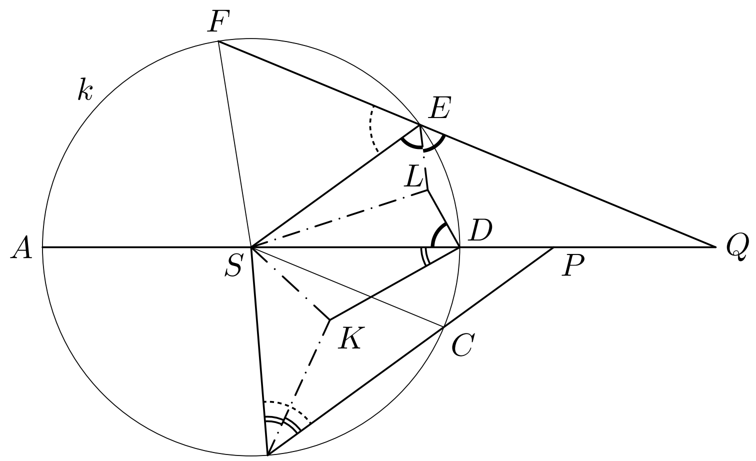
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jestliže žák správně odvodí odhad $d \leqq a^3 - a$ a uvede, že největší možná diference je $a^3 - a$, ale neukáže, že posloupnost s touto diferencí vyhovuje, dejte jen 4 body. Další 1 bod dejte až za ověření, že v tomto případě $a^5 \in \mathcal{A}$, resp. 1 bod za důkaz, že $a^4 \notin \mathcal{A}$.

Jestliže naopak žák ukáže, že posloupnost s diferencí $a^3 - a$ obsahuje a^3, a^5 a neobsahuje a^2, a^4, ale nevysvětlí, proč diference nemůže být větší, dejte jen 3 body.

V případě, že se řešitel nedostane k úvahám o diferenci $a^3 - a$, dejte 1 bod za důkaz, že $a^2 \notin \mathcal{A}$ (tj. za důkaz implikace $a^2 \in \mathcal{A} \Rightarrow a^3, a^4, a^5 \in \mathcal{A}$), 1 bod za důkaz implikace $a^3 \in \mathcal{A} \Rightarrow a^5 \in \mathcal{A}$ a 3 body za důkaz implikace $a^4, a^5 \in \mathcal{A} \Rightarrow a^2 \in \mathcal{A}$; dohromady však v tomto sledu nejvýše 4 body.

3. Označme k kružnici opsanou danému šestiúhelníku. Protože $AB \perp BD$, je k Thaletovou kružnicí nad průměrem AD a střed S úhlopříčky AD je zároveň středem kružnice k.

Dokážeme, že trojúhelník KLD má pravý úhel při vrcholu D. Velikost úhlu KDL je součtem velikostí úhlů KDS a LDS. Trojúhelníky KDS, KBS jsou shodné podle věty *sus*: stranu SK mají společnou, strany SD, SB jsou obě poloměry kružnice k a úhel při vrcholu S mají trojúhelníky shodný, neboť SK je osou úhlu BSP (obr. 1).



Obr. 1

[3] Argumentovat lze i takto: V předchozím odstavci jsme obecně dokázali, že jestliže $a^4, a^5 \in \mathcal{A}$, tak $a^2 \in \mathcal{A}$. My už o $\mathcal{A}$ víme, že obsahuje a^5 a neobsahuje a^2. Proto nemůže obsahovat a^4.

Proto $|\sphericalangle KDS| = |\sphericalangle KBS|$. Odtud vzhledem k tomu, že BK je osou úhlu SBP, plyne $|\sphericalangle KDS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CBS|$.

Využijeme-li analogicky shodnost trojúhelníků LDS, LES, dostaneme $|\sphericalangle LDS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle QES|$.

K dokončení řešení stačí využít zbývající předpoklad $|BC| = |EF|$. Díky němu jsou BCS, EFS shodné rovnoramenné trojúhelníky (délky jejich ramen jsou rovny poloměru kružnice k), je tedy $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle FES|$. Spojením získaných rovností máme

$$|\sphericalangle KDL| = |\sphericalangle KDS| + |\sphericalangle LDS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CBS| + \frac{1}{2}|\sphericalangle QES| = \\ = \frac{1}{2}|\sphericalangle FES| + \frac{1}{2}|\sphericalangle QES| = \frac{1}{2}(|\sphericalangle FES| + |\sphericalangle QES|) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho 1 bod za zjištění, že AD je průměrem k; 3 body za odvození rovností $|\sphericalangle KDS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CBS|$, $|\sphericalangle LDS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle QES|$ (jestliže má řešitel jen jednu z nich, dejte 2 body; jestliže ukáže jen $|\sphericalangle KDS| = |\sphericalangle KBS|$ nebo $|\sphericalangle LDS| = |\sphericalangle LES|$, dejte 1 bod); 2 body za rovnost $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle FES|$ a úspěšné dokončení řešení.

4. Protože dané rovnosti obsahují smíšené součiny proměnných, bude výhodné zkoumat druhou mocninu součtu $a + b + c + d$. Úpravou s dosazením daných rovností dostaneme

$$\begin{aligned}(a + b + c + d)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + cd + ac + bd + ad + bc) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(4 + 4 + 5) = a^2 + d^2 + b^2 + c^2 + 26.\end{aligned} \tag{1}$$

Nyní využijeme známé nerovnosti $a^2+d^2 \geqq 2ad$, $b^2+c^2 \geqq 2bc$, v nichž platí rovnost, právě když $a = d$ a $b = c$. Na základě toho z (1) plyne

$$(a + b + c + d)^2 \geqq 2ad + 2bc + 26 = 2 \cdot 5 + 26 = 36.$$

Proto pro taková kladná čísla a, b, c, d platí $a + b + c + d \geqq \sqrt{36} = 6$, přičemž rovnost nastane, právě když $a = d$ a $b = c$. Dosazením do původních rovností dostaneme soustavu

$$2ab = 4, \quad a^2 + b^2 = 5.$$

Tu můžeme řešit vícerými postupy. Například můžeme vyjádřit

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 5 + 4 = 9,$$

tedy $a + b = 3$ (protože $a, b > 0$). Podle Viètových vztahů jsou a, b kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 3x + 2 = 0$, tudíž $\{a, b\} = \{1, 2\}$. Snadno ověříme, že čtveřice $a = d = 1$, $b = c = 2$, resp. $a = d = 2$, $b = c = 1$ skutečně splňují dané rovnosti a platí pro ně $a + b + c + d = 6$.

Odpověď. Nejmenší možná hodnota součtu $a+b+c+d$ je 6 a nabývají ji jen čtveřice $(1, 2, 2, 1)$ a $(2, 1, 1, 2)$.

Jiné řešení. Z rovnosti $ab + cd = ac + bd$ plyne $a(b - c) = d(b - c)$, takže platí $a = d$ nebo $b = c$. S ohledem na symetrii můžeme pouze uvažovat vyhovující čtveřice (a, b, c, d), ve kterých je $d = a$, a hledat tak nejmenší hodnotu součtu $S = 2a + b + c$ za předpokladu, že kladná čísla a, b, c splňují rovnosti $a(b + c) = 4$ a $a^2 + bc = 5$.

Podle Viètových vzorců jsou pak kladná čísla b, c kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - \frac{4}{a}x + (5 - a^2) = 0.$$

Ta má dva kladné (ne nutně různé) kořeny, právě když je její diskriminant

$$D = \frac{16}{a^2} - 4(5 - a^2) = \frac{4(a^2 - 1)(a^2 - 4)}{a^2}$$

nezáporný a když kromě nerovnosti $a > 0$ platí i $a^2 < 5$. Dohromady to znamená, že $a \in (0, 1\rangle \cup \langle 2, \sqrt{5})$.

Všimněme si, že pro $a = 1$ vychází kořeny $b = c = 2$, naopak pro $a = 2$ je $b = c = 1$. V obou těchto případech má zřejmě výraz $S = 2a + b + c$ hodnotu 6. Ukážeme-li, že pro ostatní přípustná a platí $S > 6$, bude to znamenat, že $\min S = 6$ a že $(1, 2, 2, 1)$ a $(2, 1, 1, 2)$ jsou jediné čtveřice poskytující nalezené minimum (protože v obou z nich platí $b = c$, žádné jiné takové čtveřice — přes omezení našich úvah na první z možností $a = d$, $b = c$ — neexistují). Z vyjádření rozdílu $S - 6$ ve tvaru

$$S - 6 = 2a + b + c - 6 = 2a + \frac{4}{a} - 6 = \frac{2(a - 1)(a - 2)}{a}$$

vidíme, že kýžená nerovnost $S > 6$ skutečně platí pro každé $a \in (0, 1) \cup (2, \sqrt{5})$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za odhad $a + b + c + d \geqq 6$ a 2 body za určení čtveřic, pro které platí rovnost.

Jestliže řešitel na odhad čtverců v (1) použije AG-nerovnosti $a^2+b^2 \geqq 2ab$, $c^2+d^2 \geqq 2cd$ a odvodí tak slabší odhad $a + b + c + d \geqq \sqrt{34}$, dejte 2 body.

Při postupu z druhého řešení udělte 1 bod za odvození rovnosti $(a-d)(b-c) = 0$, 1 bod za přechod k řešení soustavy o dvou neznámých b, c s parametrem a, 2 body za nalezení množiny přípustných hodnot a (nebo alespoň odvození nutné podmínky $a \leqq 1 \vee a \geqq 2$), 1 bod za důkaz nerovnosti $2a+4/a \geqq 6$ pro všechna přípustná a a 1 bod za určení obou hledaných čtveřic.

V případě, že žák jen uhodne výsledek a objeví čtveřice $(1, 2, 2, 1)$ a $(2, 1, 1, 2)$, dejte 1 bod (tento bod udělte jen v případě, že žák v úloze nezíská žádné jiné body).