61. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Je dáno 2 012 kladných čísel menších než 1, jejichž součet je 7. Dokažte, že lze tato čísla rozdělit do čtyř skupin tak, aby součet čísel v každé skupině byl aspoň 1.
2. Určete, kolika způsoby lze vrcholům pravidelného devítiúhelníku $ABCDEFGHI$ přiřadit čísla z množiny $\{17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97\}$ tak, aby každé z nich bylo přiřazeno jinému vrcholu a aby součet čísel přiřazených každým třem sousedním vrcholům byl dělitelný třemi.
3. Pravoúhlému trojúhelníku ABC je vepsána kružnice, která se dotýká přepony AB v bodě K. Úsečku AK otočíme o $90°$ do polohy AP a úsečku BK otočíme o $90°$ do polohy BQ tak, aby body P, Q ležely v polorovině opačné k polorovině ABC.
   a) Dokažte, že obsahy trojúhelníků ABC a PQK jsou stejné.
   b) Dokažte, že obvod trojúhelníku ABC nepřevyšuje obvod trojúhelníku PQK. Kdy nastane rovnost?
4. Najděte všechna reálná čísla x, y, která vyhovují soustavě rovnic

$$x \cdot \left\lfloor \frac{y}{x} \right\rfloor = 5,$$
$$y \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = -6.$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ značí *dolní celou část* čísla a, tj. největší celé číslo, které nepřevyšuje a.)

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 17. dubna 2012

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

61. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie B

1. Daná čísla označme $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$. Zřejmě existuje index $k \geqq 1$ takový, že

$$a_1 + \ldots + a_k < 1 \leqq a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1} < 2.$$

Čísla $a_1, \ldots, a_{k+1}$ tvoří první požadovanou skupinu. Dále zřejmě existuje index $l \geqq k+2$ takový, že

$$a_{k+2} + \ldots + a_l < 1 \leqq a_{k+2} + \ldots + a_l + a_{l+1} < 2.$$

Čísla $a_{k+2}, \ldots, a_{l+1}$ tvoří druhou požadovanou skupinu. Analogicky zřejmě existuje index $m \geqq l+2$ takový, že

$$a_{l+2} + \ldots + a_m < 1 \leqq a_{l+2} + \ldots + a_m + a_{m+1} < 2.$$

Čísla $a_{l+2}, \ldots, a_{m+1}$ tvoří třetí požadovanou skupinu. Jelikož je $a_1 + \ldots + a_{m+1} < 6$, je $a_{m+2} + \ldots + a_{2012} \geqq 1$, takže čísla $a_{m+2}, \ldots, a_{2012}$ tvoří čtvrtou požadovanou skupinu.

Za systematické a úplné řešení udělte 6 bodů.

2. Předně si uvědomme, že čísla 27, 57 a 87 jsou dělitelná třemi, čísla 37, 67 a 97 dávají při dělení třemi zbytek 1 a konečně čísla 17, 47 a 77 dávají při dělení třemi zbytek 2. Označme $\overline{0} = \{27, 57, 87\}$, $\overline{1} = \{37, 67, 97\}$ a $\overline{2} = \{17, 47, 77\}$. Uvažujme nyní pravidelný devítiúhelník $ABCDEFGHI$. Při zkoumání dělitelnosti třemi u součtů trojic přirozených čísel přiřazených sousedním třem vrcholům uvažovaného devítiúhelníku stačí uvažovat místo daných čísel pouze jejich zbytky při dělení třemi. Přitom tři čísla mohou dát v součtu číslo dělitelné třemi jedině tak, že buď všechna tři dávají při dělení třemi stejný zbytek (patří do stejné zbytkové třídy), anebo jsou každé z jiné zbytkové třídy. Kdyby však byla tři čísla po sobě jdoucích vrcholů ze stejné zbytkové třídy, muselo by z téže třídy být i číslo následujícího vrcholu (jedno kterým směrem), a tím pádem i všechna další čísla. Takových devět čísel však k dispozici nemáme, proto u libovolných tří sousedních vrcholů musejí být čísla navzájem různých zbytkových tříd.

Předpokládejme nejprve, že vrcholu A je přiřazeno některé číslo z množiny $\overline{0}$. V takovém případě lze vrcholům uvažovaného devítiúhelníku s ohledem na podmínky úlohy přiřadit zbytkové třídy $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ čísel, která k ním máme připisovat, pouze dvěma způsoby podle toho, kterému ze dvou sousedních vrcholů vrcholu A přiřadíme $\overline{1}$ a kterému $\overline{2}$. Dalším vrcholům jsou pak už zbytkové třídy vzhledem k podmínce dělitelnosti přiřazeny jednoznačně. Výsledné přiřazení můžeme zapsat jako

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}),$$

nebo

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}).$$

Je-li vrcholu A podobně přiřazena zbytková třída $\overline{1}$, platí zcela obdobně buď

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}),$$

nebo

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}).$$

A konečně je-li vrcholu A přiřazena zbytková třída $\overline{2}$, platí buď

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}),$$

nebo

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}).$$

Podle počtu možností, jak postupně vybírat čísla z jednotlivých zbytkových tříd, každému z uvedených případů odpovídá podle pravidla součinu právě

$$(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 6^3$$

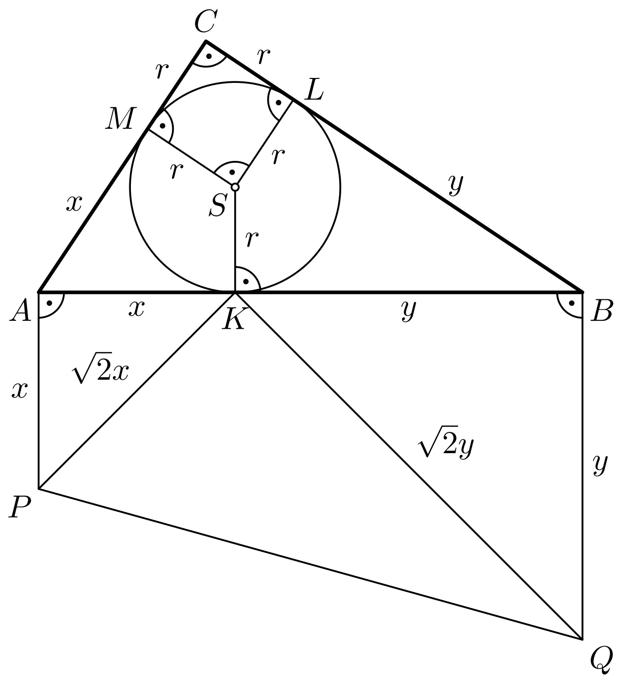
možností. Vzhledem k tomu, že jiný případ kromě šesti uvedených nemůže nastat, vidíme, že hledaný počet možností, jak přiřadit vrcholům uvažovaného devítiúhelníku daných devět čísel, je

$$3 \cdot (2 \cdot 6^3) = 6^4 = 1\,296.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za zdůvodnění, že čísla připsaná třem sousedním vrcholům mají navzájem různé zbytky při dělení třemi. Za každé opomenutí jednoho ze šesti případů strhněte 1 bod. Za chybně spočtený počet možností strhněte 2 body; za méně závažnou numerickou chybu strhněte 1 bod. Za správný výpočet počtu možností, které řešitel uvažoval, i když neuvedl všechny možnosti, udělte 2 body.

3. a) Označme S střed a r poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC a L, M body dotyku této kružnice postupně se stranami BC, CA (obr. 1). Označíme-li $|AK| = x$, $|BK| = y$, je $|AP| = |AM| = x$, $|KP| = x\sqrt{2}$, $|BQ| = |BL| = y$, $|KQ| = y\sqrt{2}$. Protože oba úhly AKP, BKQ mají velikost 45°, je trojúhelník PQK pravoúhlý, takže jeho obsah je

$$S_{PQK} = \frac{x\sqrt{2} \cdot y\sqrt{2}}{2} = xy.$$



Obr. 1

Čtyřúhelník $SLCM$ je čtverec se stranou délky r a je $|AM| = x$, $|BL| = y$. Obsah trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů trojúhelníků ABS, BCS a CAS, tedy

$$S_{ABC} = \frac{(x+y)r + (y+r)r + (x+r)r}{2} = (x+y+r)r.$$

Obsah trojúhelníku ABC je také roven

$$S_{ABC} = \frac{|AC| \cdot |BC|}{2} = \frac{(x+r)(y+r)}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{(x+y+r)r}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{S_{ABC}}{2}.$$

Odsud dostáváme $S_{ABC} = xy$ neboli $S_{ABC} = S_{PQK}$, což jsme měli dokázat.

b) V trojúhelníku ABC jsou délky stran $a = y + r$, $b = x + r$, $c = x + y$. Obvod trojúhelníku ABC je $a + b + |AB|$, obvod trojúhelníku PQK je $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + |PQ|$.

Zřejmě platí $|AB| \leqq |PQ|$ ($|AB|$ je vzdáleností rovnoběžek AP, BQ, obr. 1). Rovnost nastane jedině v případě $|AP| = |BQ|$ neboli $x = y$.

Ještě dokážeme, že $a + b \leqq x\sqrt{2} + y\sqrt{2}$ neboli že $a + b \leqq c\sqrt{2}$. Poslední nerovnost je ekvivalentní nerovnosti, kterou dostaneme umocněním na druhou, protože obě její strany jsou kladné. Dostaneme tak $a^2 + b^2 + 2ab \leqq 2c^2$. Jelikož v pravoúhlém trojúhelníku ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$, máme dokázat nerovnost $2ab \leqq a^2 + b^2$, která je však ekvivalentní nerovnosti $0 \leqq (a - b)^2$. Ta platí pro všechna reálná čísla a, b a rovnost v ní nastane jedině pro $a = b$, tj. $x = y$.

Celkově vidíme, že obvod trojúhelníku ABC je menší nebo roven obsahu trojúhelníku PQK a rovnost nastane, právě když je pravoúhlý trojúhelník ABC rovnoramenný.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za opomenutí podmínky, kdy nastane rovnost, strhněte 2 body. Za pouhé vyšetření rovnosti udělte 1 bod.

4. Nutně platí $xy \neq 0$. Zřejmě je také $x \neq y$; kdyby bylo $x = y$, dostali bychom $\lfloor x/y \rfloor = \lfloor y/x \rfloor = 1$, takže z první rovnice by vyšlo $x = 5$ a z druhé rovnice $y = -6$, což je v rozporu s rovností $x = y$. Podobně nemůže být ani $x = -y$, takže je dokonce $|x| \neq |y|$.

Pokud by obě neznámé měly stejná znaménka, bylo by jedno z čísel x/y, y/x z intervalu $(0, 1)$, takže jeho celá část by byla 0, což nevede k řešení. Jedna z neznámých tedy musí být kladná a druhá záporná a obě celé části v rovnicích jsou záporné. Z nich proto také vyplývá, že $x < 0$ a $y > 0$.

Znaménka čísel x, y jsou různá a absolutní hodnoty těchto čísel jsou také různé, proto právě jedno z čísel x/y, y/x je z intervalu $(-1, 0)$, a jeho celá část je tudíž -1.

Nejprve prozkoumáme případ $\lfloor x/y \rfloor = -1$. Z druhé zadané rovnice dostaneme $y = 6$. První zadaná rovnice má pak tvar $\lfloor 6/x \rfloor = 5/x$. Využijeme-li navíc definici celé části, dostaneme

$$\frac{5}{x} = \left\lfloor \frac{6}{x} \right\rfloor \leqq \frac{6}{x}, \quad \text{tj.} \quad \frac{5}{x} \leqq \frac{6}{x}.$$

Poslední nerovnice ovšem nemůže pro záporné číslo x platit, neboť je ekvivalentní nerovnosti $5 \geqq 6$. Daná soustava rovnic nemá tudíž v případě $\lfloor x/y \rfloor = -1$ řešení.

Zbývá případ $\lfloor y/x \rfloor = -1$. Z první zadané rovnice máme $x = -5$. Druhá zadaná rovnice má pak tvar $\lfloor -5/y \rfloor = -6/y$. Podle definice celé části tedy platí

$$\frac{-5}{y} < \left\lfloor \frac{-5}{y} \right\rfloor + 1 = \frac{-6}{y} + 1, \quad \text{tj.} \quad \frac{-5}{y} < \frac{-6}{y} + 1,$$

odkud po vynásobení kladným číslem y dostaneme $y > 1$. Využijeme-li definici celé části i pro rovnici $\lfloor y/-5 \rfloor = -1$, dostaneme

$$-1 \leqq \frac{y}{-5} < 0 \quad \text{neboli} \quad 0 < y \leqq 5.$$

Spojením obou podmínek pro neznámou y tak dostáváme $1 < y \leqq 5$. Naopak, pro každé takové y a $x = -5$ je první rovnice soustavy splněna. Tuto podmínku postupně upravíme na ekvivalentní nerovnosti $1 > 1/y \geqq \frac{1}{5}$ a $-5 < -5/y \leqq -1$. Z té poslední vyplývá, že výraz $\lfloor -5/y \rfloor$ může nabývat jedině hodnot -5, -4, -3, -2, -1.

Z druhé rovnice upravené do tvaru $y = -6/\lfloor -5/y \rfloor$ tak plyne, že neznámá y může nabývat jedině hodnot $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$, 2, 3, 6. Poslední z nich však (na rozdíl od prvních čtyř) nesplňuje odvozené kritérium $1 < y \leqq 5$ platnosti první rovnice soustavy. Zda je pro první čtyři hodnoty splněna druhá rovnice, se ovšem musíme přesvědčit alespoň tak, že ověříme hodnotu výrazu $\lfloor -5/y \rfloor$, která nás k nim přivedla. Pro y rovné po řadě $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$, 2, 3 je zlomek $-5/y$ postupně roven $-\frac{25}{6}$, $-\frac{10}{3}$, $-\frac{5}{2}$ a $-\frac{5}{3}$ s odpovídajícími celými částmi skutečně -5, -4, -3, -2.

Shrneme-li všechny úvahy, dostaneme, že řešením dané soustavy jsou následující dvojice čísel (x, y): $(-5, \frac{6}{5})$, $(-5, \frac{3}{2})$, $(-5, 2)$, $(-5, 3)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za zjištění, že obě celé části v rovnicích jsou nutně záporné, a další dva body za zjištění, že musí platit $x = -5$ nebo $y = 6$. Při postupu založeném na pouhém experimentování se zvolenými čísly za zkusmé nalezení všech čtyř řešení udělte 2 body, pokud by některé řešení chybělo, udělte 1 bod, za zkusmé nalezení jediného řešení neudělujte žádný bod.