# 61. ročník matematické olympiády
# III. kolo kategorie A

Hradec Králové, 25.–28. března 2012

**1.** *Najděte všechna celá čísla $n$, pro něž je $n^4 - 3n^2 + 9$ prvočíslo.* (Aleš Kobza)

**Řešení.** Zadaný výraz lze jednoduchou úpravou rozložit na součin:

$$n^4 - 3n^2 + 9 = n^4 + 6n^2 + 9 - 9n^2 = (n^2+3)^2 - (3n)^2 = (n^2+3n+3)(n^2-3n+3).$$

Aby součin dvou celých čísel byl prvočíslem $p$, musí být jeden z činitelů roven 1 nebo $-1$ (a druhý $p$, resp. $-p$). Diskriminanty obou kvadratických trojčlenů jsou však $(\pm 3)^2 - 4 \cdot 4 = -3$, tedy záporné, takže oba trojčleny nabývají jen kladné hodnoty. Vzhledem k tomu stačí uvažovat jen kvadratické rovnice

$$n^2 + 3n + 3 = 1 \qquad \text{a} \qquad n^2 - 3n + 3 = 1.$$

Řešením první z nich jsou čísla $n = -1$ a $n = -2$, pro něž druhý činitel nabývá hodnot 7 a 13, což jsou prvočísla.

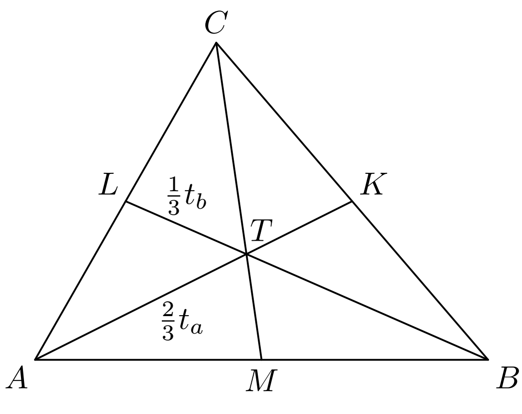
Řešením druhé rovnice jsou $n = 1$ a $n = 2$, pro něž první činitel opět nabývá prvočíselných hodnot 7 a 13.

*Odpověď.* Zadaný výraz je prvočíslem, právě když $n \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

**2.** *Zjistěte, jaký je největší možný obsah trojúhelníku $ABC$, jehož těžnice mají délky vyhovující nerovnostem $t_a \leqq 2$, $t_b \leqq 3$, $t_c \leqq 4$.* (Pavel Novotný)

**Řešení.** Označme $T$ těžiště trojúhelníku $ABC$ a $K$, $L$, $M$ středy stran $BC$, $CA$, $AB$. Těžnice rozdělují trojúhelník $ABC$ na šest menších trojúhelníků se stejným obsahem: Například trojúhelník $AMT$ má stranu $|AM| = \frac{1}{2}c$ a jeho výška na stranu $AM$ má velikost $\frac{1}{3}v_c$, takže $S_{AMT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{3}v_c = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}c \cdot v_c = \frac{1}{6}S_{ABC}$, a stejný výsledek analogicky dostaneme i pro zbylých pět trojúhelníků.

Daná úloha je tedy ekvivalentní úloze určit největší možný obsah jednoho ze šesti menších trojúhelníků — výsledek stačí vynásobit šesti.




Obr. 1

Uvažujme například trojúhelník $ATL$ (obr. 1). Pro jeho dvě strany platí

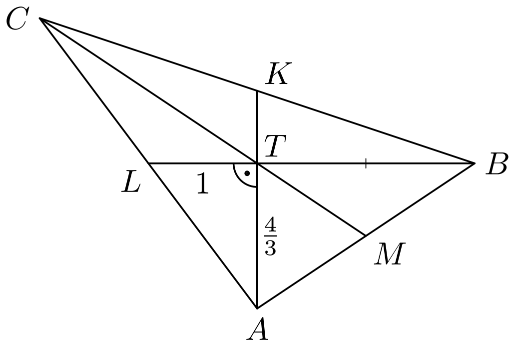
$$|AT| = \frac{2}{3}t_a \leqq \frac{4}{3}, \qquad |TL| = \frac{1}{3}t_b \leqq 1.$$

Proto pro jeho obsah dostáváme

$$S_{ATL} = \frac{1}{2}|AT| \cdot |TL| \cdot \sin|\sphericalangle ATL| \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Tím jsme dokázali, že obsah trojúhelníku $ABC$, jehož těžnice splňují dané nerovnosti, nemůže být větší než $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$. Přitom rovnost $S_{ATL} = \frac{2}{3}$ (tj. $S_{ABC} = 4$) nastane, právě když $t_a = 2$, $t_b = 3$ a $|\sphericalangle ATL| = 90°$.[1]

Trojúhelník $ABC$ s těmito vlastnostmi dovedeme sestrojit: Nejdříve narýsujeme pravoúhlý trojúhelník $ATL$, v němž známe délky obou odvěsen $|AT| = \frac{4}{3}$, $|TL| = 1$, a následně sestrojíme bod $C$ jako obraz bodu $A$ ve středové souměrnosti se středem $L$ a bod $B$ jako obraz bodu $L$ ve stejnolehlosti se středem $T$ a koeficientem $-2$ (obr. 2). Zbývá už jen ověřit, že v takovémto trojúhelníku $ABC$ platí $t_c \leqq 4$.




Obr. 2

Délku $t_c$ lze vypočítat různými způsoby. Například v pravoúhlém trojúhelníku $ABT$ má přepona $AB$ podle Pythagorovy věty délku

$$|AB| = \sqrt{|AT|^2 + |TB|^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 4} = \sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{13},$$

takže velikost poloměru Thaletovy kružnice nad průměrem $AB$ je

$$|MT| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{3}\sqrt{13}.$$

Odtud $t_c = 3|MT| = \sqrt{13} < 4$.[2]

*Odpověď.* Největší možný obsah trojúhelníku $ABC$ je 4.

---

**3.** *Dokažte, že mezi libovolnými 101 reálnými čísly existují dvě čísla $u$ a $v$, pro něž platí*

$$100\,|u - v| \cdot |1 - uv| \leqq (1 + u^2)(1 + v^2).$$

(Pavel Calábek)

**Řešení.** Ekvivalentními úpravami zadané nerovnosti (s využitím toho, že výraz $1 + x^2$ je kladný pro každé reálné $x$) dostaneme

$$\begin{aligned}
100\,|(u - v)(1 - uv)| &\leqq (1 + u^2)(1 + v^2),\\
100\,\bigl|u - v - u^2v + uv^2\bigr| &\leqq (1 + u^2)(1 + v^2),\\
\bigl|u(1 + v^2) - v(1 + u^2)\bigr| &\leqq \frac{1}{100}(1 + u^2)(1 + v^2),\\
\left|\frac{u}{1 + u^2} - \frac{v}{1 + v^2}\right| &\leqq \frac{1}{100}.
\end{aligned} \tag{1}$$

[1] Stejný výsledek snadno dostaneme i bez využití funkce sinus: Pro výšku $v$ na stranu $AT$ v trojúhelníku $ATL$ zřejmě platí $v \leqq |TL|$, takže $S_{ATL} = \frac{1}{2}v|AT| \leqq \frac{1}{2}|TL||AT|$, přičemž rovnost platí, právě když $AT \perp TL$.

[2] Pokud si nevšimneme Thaletovy kružnice nad $AB$, můžeme postupovat i tak, že z pravoúhlých trojúhelníků $ATL$ a $BTK$ dopočítáme přepony, které jsou polovinami stran $b$, $a$ trojúhelníku $ABC$: $\frac{1}{2}b = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3}$, $\frac{1}{2}a = \sqrt{4 + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$. Tedy $a = \frac{4}{3}\sqrt{10}$, $b = \frac{10}{3}$, $c = \frac{2}{3}\sqrt{13}$ a délku těžnice vypočteme podle známého vzorce $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Všechny hodnoty funkce

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

leží v intervalu $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, protože pro libovolné reálné číslo $x$ platí

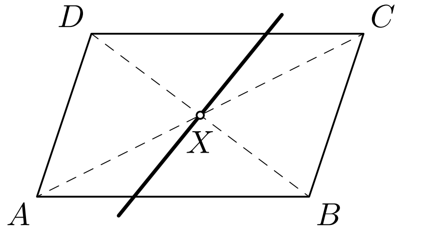
$$|x| = \sqrt{1 \cdot x^2} \leqq \frac{1+x^2}{2} \quad \text{neboli} \quad \frac{|x|}{1+x^2} \leqq \frac{1}{2}.$$

Rozdělme interval $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ o délce 1 rovnoměrně na sto intervalů o délce $\frac{1}{100}$. Podle Dirichletova principu mezi libovolnými 101 reálnými čísly najdeme dvě čísla $u$, $v$ taková, že $f(u)$, $f(v)$ leží v témže intervalu. Pro tuto dvojici zřejmě platí $|f(u) - f(v)| \leqq \frac{1}{100}$, což je právě nerovnost (1), která je ekvivalentní se zadanou nerovností.

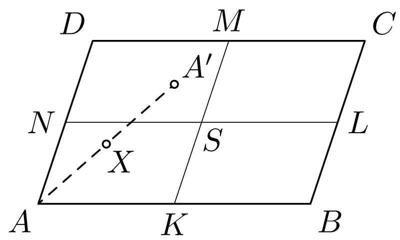
---

**4.** *Uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod $X$. Sestrojte přímku, která prochází bodem $X$ a rozděluje daný rovnoběžník na dvě části, jejichž obsahy se navzájem liší co nejvíce.* (Vojtech Bálint)

**Řešení.** Protože součet obsahů obou částí, na které přímka dělí rovnoběžník $ABCD$, je stále stejný, budou se nejvíce lišit, právě když menší z obsahů bude nejmenší možný. Řešení začneme pozorováním, že pokud je bod $X$ středem rovnoběžníku $ABCD$, dělí každá přímka, která jím prochází, rovnoběžník na dvě části se stejným obsahem. Obě části jsou totiž v takovém případě shodné — jedna je obrazem druhé ve středové souměrnosti podle středu $X$ (obr. 3). V tomto případě je každá přímka procházející bodem $X$ řešením úlohy.




Obr. 3

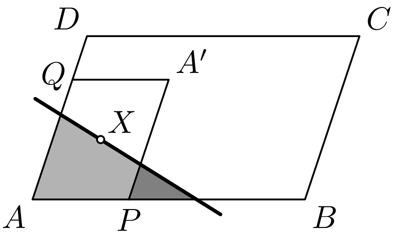



Obr. 4

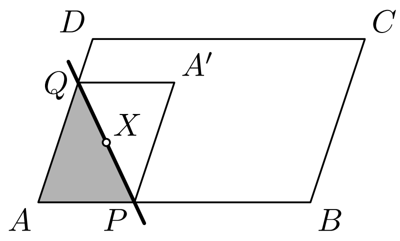
Středovou souměrnost využijeme i při obecné poloze bodu $X$. Označme postupně $K$, $L$, $M$, $N$ středy stran $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ a $S$ střed rovnoběžníku $ABCD$. Předpokládejme nejprve, že bod $X$ leží uvnitř rovnoběžníku $AKSN$ (to znamená, že bod $A'$, který je obrazem bodu $A$ ve středové souměrnosti podle $X$, leží uvnitř rovnoběžníku $ABCD$, obr. 4).

Bodem $A'$ veďme rovnoběžky se stranami rovnoběžníku a jejich průsečíky se stranami $AB$ a $AD$ označme $P$ a $Q$. Čtyřúhelník $APA'Q$ je zřejmě rovnoběžník, jehož středem je bod $X$. Proto každá přímka procházející bodem $X$ rozděluje $APA'Q$ na dva útvary stejného obsahu. Každý z těchto dvou útvarů přitom patří do jiné ze dvou částí, na něž uvedená přímka zároveň rozděluje rovnoběžník $ABCD$ (obr. 5a). To znamená, že ani jedna ze dvou částí rovnoběžníku $ABCD$ nemá obsah menší než polovina obsahu rovnoběžníku $APA'Q$. Nejmenšího obsahu menší části proto dosáhneme, když kromě útvaru pocházejícího z rovnoběžníku $APA'Q$ nebude tato část obsahovat už žádný jiný bod daného rovnoběžníku, což nastane právě v případě, kdy dělící přímkou bude přímka $PQ$ (obr. 5b).

Jestliže bod $X$ leží uvnitř rovnoběžníku $KBLS$, $SLCM$ či $NSMD$ (obr. 4), sestrojíme dělící přímku obdobným postupem: Pomocí obrazu bodu $B$, $C$ či $D$ ve středové




Obr. 5a

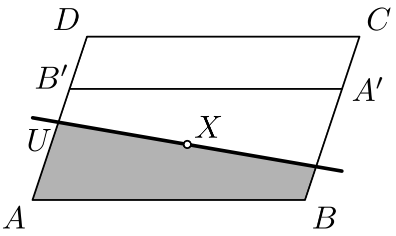



Obr. 5b

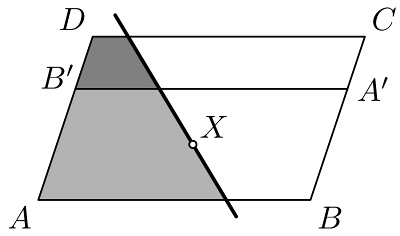
souměrnosti podle $X$ sestrojíme menší rovnoběžník, který bude celý ležet uvnitř rovnoběžníku $ABCD$, bude mít střed $X$ a dvě jeho strany budou ležet na stranách původního rovnoběžníku. Rozdělující přímkou pak musí být jedna z jeho úhlopříček, která oddělí jeho polovinu od zbytku rovnoběžníku $ABCD$.

Zbývá vyšetřit případ, kdy bod $X$ leží uvnitř jedné z úseček $KM$, $NL$ (mimo střed rovnoběžníku $ABCD$). I v této situaci umíme sestrojit menší rovnoběžník, který celý leží v rovnoběžníku $ABCD$, bod $X$ je jeho středem a strany (tentokrát až tři) má na stranách původního rovnoběžníku.

Jestliže $X$ leží uvnitř úsečky $KS$, je takovým rovnoběžníkem $ABA'B'$, přičemž $A'$, $B'$ jsou obrazy bodů $A$, $B$ ve středové souměrnosti podle $X$. I v tomto případě musíme dělící přímku bodem $X$ vést tak, aby jedna z částí rovnoběžníku $ABCD$ neobsahovala kromě útvaru pocházejícího z rovnoběžníku $ABA'B'$ nic jiného. Je zřejmé, že vyhovující bude právě každá přímka $UX$, kde $U$ je libovolný bod úsečky $AB'$ (obr. 6a, b).




Obr. 6a




Obr. 6b

Analogicky najdeme dělící přímky v případě, že $X$ leží uvnitř některé z úseček $SM$, $NS$ či $SL$.

*Závěr.* Jestliže $X$ je středem rovnoběžníku $ABCD$, je řešením libovolná přímka procházející bodem $X$. Jestliže $X$ leží mimo úsečky $KM$, $NL$, je řešením jediná přímka. Jestliže $X$ leží uvnitř některé z úseček $KS$, $SM$, $NS$, $SL$, je řešením nekonečně mnoho přímek. V každém z těchto případů je jejich konstrukce zřejmá z předešlých úvah.

---

**5.** *Ve skupině 90 dětí má každé aspoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že je lze rozdělit do tří 30členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupině aspoň jednoho kamaráda.* (Ján Mazák)

**Řešení.** Rozdělení vyhovující zadání nepopíšeme, jen dokážeme, že takové rozdělení existuje. Všech možných rozdělení 90 dětí na tři 30členné skupiny (pokud nezáleží na pořadí skupin) je celkem

$$V = \binom{90}{30} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{3!},$$

protože každé takové rozdělení můžeme vytvořit tak, že nejdříve vybereme ze všech dětí jednu 30člennou skupinu a potom ze zbylých 60 dětí vybereme druhou 30člennou skupinu. Třetí skupina bude tvořena dětmi, které zůstaly (číslem 3! je přirozeně potřeba výsledný součin vydělit, protože každé rozdělení jsme započítali tolikrát, kolik je pořadí tří skupin).

Rozdělení nazveme *špatné kvůli dítěti* $A$, jestliže při něm dítě $A$ nemá ve své skupině žádného kamaráda. Zabývejme se tím, kolik je všech špatných rozdělení (tedy takových, která *nevyhovují* zadání), a jejich počet označme $Z$. Stačí, když ukážeme, že špatných rozdělení je méně než všech, tj. $Z < V$.

Zkoumejme, jaký je počet rozdělení, která jsou špatná kvůli $A$ — jejich počet označme $Z_A$. Jestliže $A$ má mezi všemi právě $n$ kamarádů (má tedy $89 - n$ „nekamarádů“), existuje[3]

$$\binom{89-n}{29}$$

30členných skupin, v nichž je $A$ společně s dalšími 29 dětmi, z nichž ani jedno není jeho kamarád. Pro každou takovou skupinu umíme zbylých 60 dětí rozdělit

$$\binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2}$$

způsoby na dvě 30členné skupiny (na pořadí skupin ohled nebereme). Počet rozdělení špatných kvůli $A$ je tedy

$$Z_A = \binom{89-n}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2} \leqq \binom{59}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2} \tag{1}$$

(v nerovnosti jsme využili dané ohraničení $n \geqq 30$, tedy $89 - n \leqq 59$ — zřejmě z čím větší množiny 29 prvků vybíráme, tím více možností dostaneme).

Celkový počet špatných rozdělení určitě není větší než součet počtů špatných rozdělení pro jednotlivé děti (každé špatné rozdělení může být totiž špatné i kvůli více dětem). Protože dětí je 90, podle (1) máme

$$Z \leqq 90 \cdot \binom{59}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2}.$$

Na důkaz nerovnosti $Z < V$ tak stačí dokázat nerovnost

$$90 \cdot \binom{59}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2} < \binom{90}{30} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{3!}, \tag{2}$$

již ekvivalentně upravíme:

$$45 \cdot \binom{59}{29} < \binom{90}{30} \cdot \frac{1}{6},$$

$$6 \cdot 45 \cdot \frac{59!}{29! \cdot 30!} < \frac{90!}{30! \cdot 60!},$$

$$6 \cdot 45 \cdot 59 \cdot 58 \cdot \ldots \cdot 30 < 90 \cdot 89 \cdot \ldots \cdot 61,$$

$$6 \cdot 45 < \frac{90}{59} \cdot \frac{89}{58} \cdot \ldots \cdot \frac{61}{30}. \tag{3}$$

Každý z třiceti zlomků na pravé straně poslední nerovnosti je zřejmě větší než 1,5, proto je pravá strana větší než $1{,}5^{30} = 2{,}25^{15} > 2^{15} > 270 = 6 \cdot 45$. Dokázali jsme tak nerovnost (3), a tedy i (2), což znamená, že existuje rozdělení, které není špatné.

[3] Pokud $n > 60$, žádné rozdělení špatné kvůli $A$ neexistuje. Abychom se vyhli rozebírání zvláštních případů, definujeme, jak je zvykem, $\binom{k}{l} = 0$ pro $k < l$.

**6.** *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$x^4 + y^2 + 4 = 5yz,$$
$$y^4 + z^2 + 4 = 5zx,$$
$$z^4 + x^2 + 4 = 5xy.$$

(Jaroslav Švrček)

**Řešení.** Nejdříve odhadneme levou stranu první rovnice dané soustavy pomocí nerovnosti $4x^2 \leqq x^4 + 4$, která je splněna pro libovolné reálné číslo $x$, protože je ekvivalentní s nerovností $0 \leqq (x^2 - 2)^2$. Rovnost v ní nastane, právě když $x^2 = 2$, tj. právě když $x = \sqrt{2}$ nebo $x = -\sqrt{2}$.

Dostaneme tak

$$4x^2 + y^2 \leqq x^4 + y^2 + 4 = 5yz.$$

Analogicky odhadneme i levé strany zbylých dvou rovnic soustavy. Obdržíme tak trojici nerovnic

$$4x^2 + y^2 \leqq 5yz, \quad 4y^2 + z^2 \leqq 5zx, \quad 4z^2 + x^2 \leqq 5xy, \tag{1}$$

jejichž sečtením dostaneme po jednoduché úpravě nerovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq xy + yz + zy$$

a tu ekvivalentně upravíme na tvar

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \leqq 0. \tag{2}$$

Součet druhých mocnin nemůže být záporný, proto v nerovnici (2) nutně nastává rovnost, platí tedy $x = y = z$. Rovnost musí tak platit i v každé nerovnici v (1). Odtud plyne

$$x = y = z = \sqrt{2} \quad \text{anebo} \quad x = y = z = -\sqrt{2}.$$

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že obě nalezené trojioce dané soustavě vyhovují.

*Závěr.* Daná soustava rovnic má v oboru reálných čísel právě dvě řešení, a to trojice $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

**Jiné řešení.** Po substituci $x = \sqrt{2}a$, $y = \sqrt{2}b$, $z = \sqrt{2}c$ (již přirozeně děláme, aby soustava měla triviálně řešení $a = b = c = \pm 1$) řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 4a^4 + 2b^2 + 4 &= 10bc, \\ 4b^4 + 2c^2 + 4 &= 10ca, \\ 4c^4 + 2a^2 + 4 &= 10ab. \end{aligned} \tag{3}$$

Přitom podle nerovnosti mezi váženým aritmetickým a geometrickým průměrem (nezáporných) čísel $a^4$, $b^4$, $a^2$, $b^2$, 1 platí

$$\frac{2a^4 + 2b^4 + a^2 + b^2 + 4}{10} \geqq \sqrt[10]{a^{10}b^{10}} = |ab| \geqq ab,$$

takže $2a^4 + 2b^4 + a^2 + b^2 + 4 \geqq 10ab$. Sečtením této nerovnosti s dvěma nerovnostmi, které z ní získáme cyklickou záměnou proměnných, dostaneme, že v (3) je součet levých stran větší nebo rovný součtu pravých stran, přičemž rovnost nastane, jedině když nastane v použitých AG-nerovnostech, tedy jedině když $a^2 = b^2 = c^2 = 1$. Přitom $a$, $b$, $c$ musejí mít totožná znaménka, aby platila rovnost i v nerovnosti $|ab| \geqq ab$ a v dalších dvou analogických nerovnostech. Jediným řešením soustavy (3) jsou tudíž trojice $(1, 1, 1)$ a $(-1, -1, -1)$, jimž odpovídají stejné trojice $(x, y, z)$, které jsme našli v prvním řešení (a ověřili je zkouškou).