Návody k domácí části I. kola kategorie A

1. *Najděte všechny dvojice prvočísel p, q, pro které existuje přirozené číslo a takové, že*

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nechť p a q jsou prvočísla. Zjistěte, jaký je největší společný dělitel čísel $p+q$ a p^2+q^2. [$2p$, jestliže $p=q$; 2, jsou-li p a q různá lichá prvočísla; 1, je-li jedno z čísel p, q liché a jedno sudé]
2. Dokažte, že zlomek $\dfrac{21n+4}{14n+3}$, v němž n je přirozené číslo, nelze krátit. [1. MMO, 1959]
3. Určete všechna celá čísla větší než 1, kterými lze krátit některý ze zlomků tvaru $\dfrac{3p-q}{5p+2q}$, kde p a q jsou nesoudělná celá čísla. [58–A–S–3]
4. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že $\dfrac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo. [58–A–I–3]
5. Určete všechny dvojice prvočísel p, q, pro něž platí $p+q^2=q+p^3$. [55–B–II–1]
6. Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňující následující podmínky:
$$p \mid q+r, \quad q \mid r+2p, \quad r \mid p+3q.$$
[55–A–III–5]

2. *Dvě kružnice $k_1(S_1,r_1)$ a $k_2(S_2,r_2)$ se vně dotýkají a leží ve čtverci $ABCD$ o straně a tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD a k_2 se dotýká stran BC a CD. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah nejvýše $\frac{3}{16}a^2$.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro poloměry r_1, r_2 platí nerovnost $r_1+r_2 \geqq \frac{1}{2}a$ a rovnost $\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} = \sqrt{a}$.
2. Označme G ten bod střední příčky čtverce $ABCD$ rovnoběžné se stranou AD, jehož vzdálenost od strany AB je trojnásobkem vzdálenosti od strany CD. Dokažte, že G leží ve vnitřní oblasti kružnice k_1, právě když $r_1 > \frac{1}{4}a$.
3. Dokažte, že nemohou současně platit nerovnosti $r_1 > \frac{1}{4}a$ a $r_2 > \frac{1}{4}a$.
4. Dokažte, že obsah trojúhelníku AS_1S_2 je menší než obsah trojúhelníku BS_1S_2, právě když $r_1 > r_2$.
5. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah nejméně $\frac{3}{16}a^2$.
6. Je dána kružnice $k_1(S_1,r_1)$ a kružnice $k_2(S_2,r_2)$, kde $r_2 < r_1$. Tyto kružnice mají vnitřní dotyk v bodě A. Sestrojte kružnici k_3, která má vnitřní dotyk s kružnicí k_1, vnější dotyk s kružnicí k_2 a dotýká se přímky AS_1. [15–A–II–3]
7. Dvě kružnice $k_1(S_1,r_1)$ a $k_2(S_2,r_2)$ se vně dotýkají a leží ve čtverci $ABCD$ o straně a tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD a k_2 se dotýká stran BC a AB. Vypočítejte obsah trojúhelníku AS_1S_2. [$\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)a^2$]

3. *Označme $p(n)$ počet všech n-místných čísel složených jen z číslic $1, 2, 3, 4, 5$, v nichž se každé dvě sousední číslice liší alespoň o 2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí*

$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Označme p_n počet všech n-místných čísel složených jen z číslic 1 a 2, v nichž se nevyskytují dvě jednotky vedle sebe. Dokažte, že $p_n = F_{n+3}$, kde F_k je k-tý člen Fibonacciho posloupnosti.
2. Označme p_n počet všech n-místných čísel složených jen z číslic 1, 2, 3, v nichž se nevyskytují tři stejné číslice vedle sebe. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí $p_n > 2{,}7^n$.
3. Označme p_n počet všech n-místných čísel, v jejichž dekadickém zápise se vyskytují vedle sebe dvě nuly. Dokažte, že

$$p_n = 9 \cdot 10^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{117}} \cdot \left[\left(\frac{9+\sqrt{117}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{9-\sqrt{117}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

4. Po vrcholech pravidelného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ skáče klokan. Každým skokem se přemisťuje z jednoho vrcholu do některého z obou sousedních; začíná v A a zastaví se, jakmile se poprvé dostane do E. Označme a_n počet všech různých cest z A do E složených právě z n skoků. Dokažte, že pro všechna $k = 1, 2, 3, \dots$ platí

$$a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1}),$$

kde $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$. [21. MMO, 1979]

4. *Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna nenulová čísla x, y platí*

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Najděte všechny funkce $f\colon \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$, které vyhovují současně následujícím třem podmínkám:
   a) Pro libovolná nezáporná čísla x a y taková, že $x + y > 0$, platí rovnost
   $$f\left(xf(y)\right) f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right);$$
   b) $f(1) = 0$;
   c) $f(x) > 0$ pro libovolné $x > 1$. [54–A–I–6]
2. Nechť $\mathbb{R}_+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, které pro libovolná kladná čísla x, y splňují rovnost
   $$x^2 \left(f(x) + f(y)\right) = (x+y) f\left(f(x)y\right).$$
   [53–A–III–6]

3. Nechť $\mathbb{R}_+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ splňující pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}_+$ rovnost
$$f\left(xf(y)\right) = f(xy) + x.$$
[51–A–III–6]
4. Označme $\mathbb{R}_+$ množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}_+$ platí
$$f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f\left(x \cdot f(y)\right) + \frac{1}{xy}.$$
[60–A–III–6]
Užitečné informace o funkcionálních rovnicích jsou například na

`http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~franta/bakalarka`.

5. *Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Kružnice, která prochází vrcholem B a dotýká se přímky AI v bodě I, protíná strany AB, BC postupně v bodech P, Q. Průsečík přímky QI se stranou AC označme R. Dokažte, že platí*
$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

Návodné a doplňující úlohy:
1. Dokažte, že když označíme velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC obvyklým způsobem a J průsečík přímky AI se stranou BC, tak v dané situaci platí:
   a) $|\sphericalangle JIQ| = |\sphericalangle RIA| = |\sphericalangle PIA| = |\sphericalangle IPQ| = |\sphericalangle PBI| = |\sphericalangle QBI| = \frac{1}{2}\beta$;
   b) $PQ \parallel AI$;
   c) $|\sphericalangle QIB| = |\sphericalangle QPB| = |\sphericalangle IAP| = |\sphericalangle RAI| = \frac{1}{2}\alpha$;
   d) $|CR| = |CQ|$;
   e) $|\sphericalangle BQR| = |\sphericalangle ARQ| = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$.
2. Do kružnice k je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD není průměrem. Dokažte, že průsečík přímek, které se kružnice k dotýkají v bodech B a D, leží na přímce AC, právě když platí $|AB|\cdot|CD| = |AD|\cdot|BC|$. [51–A–II–3]
3. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné. [59–A–II–2]
4. Nechť M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme S, S_1, S_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC, AMC, BMC.
   a) Dokažte, že body M, C, S_1, S_2 a S leží na jedné kružnici.
   b) Pro kterou polohu bodu M má tato kružnice nejmenší poloměr? [56–A–II–3]
5. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na jedné kružnici. [53–A–III–5]

6. *V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 y &= \operatorname{tg}^2 z, \\ \sin^2 y + \cos^2 z &= \operatorname{tg}^2 x, \\ \sin^2 z + \cos^2 x &= \operatorname{tg}^2 y. \end{aligned}$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nerovnost
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq \frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n}$$
mezi aritmetickým a harmonickým průměrem libovolných kladných čísel a_1, $a_2, \ldots, a_n$ odvoďte dvojím užitím známější nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Ukažte přitom, že rovnost v odvozené nerovnosti nastane, jedině když $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. [Doporučenou AG-nerovnost zapište jak pro n-tici uvažovaných čísel a_i, tak pro n-tici čísel k nim převrácených a zapsané nerovnosti pak mezi sebou vynásobte. Tvrzení o rovnosti plyne z obdobného tvrzení o rovnosti v AG-nerovnosti.]
2. V množině reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$x^2 + \frac{1}{y^2} = 2, \quad y^2 + \frac{1}{z^2} = 2, \quad z^2 + \frac{1}{w^2} = 2, \quad w^2 + \frac{1}{x^2} = 2.$$
[$x^2 = y^2 = z^2 = w^2 = 1$, tedy 16 řešení]
3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$x^2 - y = z^2, \quad y^2 - z = x^2, \quad z^2 - x = y^2.$$
[57–A–S–1]
4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$\sqrt{x - y^2} = z - 1, \quad \sqrt{y - z^2} = x - 1, \quad \sqrt{z - x^2} = y - 1.$$
[59–A–S–1]
5. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$\sqrt{x^2 - y} = z - 1, \quad \sqrt{y^2 - z} = x - 1, \quad \sqrt{z^2 - x} = y - 1.$$
[59–A–I–1]
6. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$x^2 + 2yz = 6(y + z - 2), \quad y^2 + 2zx = 6(z + x - 2), \quad z^2 + 2xy = 6(x + y - 2).$$
[53–A–S–3]
7. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$x^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad y^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}, \quad z^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$
[53–A–I–6]

8. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x(y+z+1)=y^2+z^2-5,\ \ y(z+x+1)=z^2+x^2-5,$$
$$z(x+y+1)=x^2+y^2-5.$$

[54–A–II–2]

9. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2-1=p(y+z),\quad y^2-1=p(z+x),\quad z^2-1=p(x+y)$$

s neznámými x, y, z a parametrem p. Vykonejte diskusi počtu řešení.

[51–A–II–4]

10. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^4+y^2+4=5yz,\quad y^4+z^2+4=5zx,\quad z^4+x^2+4=5xy.$$

[61–A–III–6]