Návody k domácí části I. kola kategorie B

1. *Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, pro které platí*

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž platí $2^a - 16^b = 0$ [$(a, b) = (4b, b)$, kde b je libovolné přirozené číslo.]
2. Určete všechny čtveřice (a, b, c, d) celých nezáporných čísel splňující rovnici

$$2^a 3^b 4^c = 16^d.$$

   [$(a, b, c, d) = (4d - 2c, 0, c, d)$, kde c, d jsou libovolná celá nezáporná čísla, pro která platí $c \leqq 2d$.]
3. V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$2^a + 2^b = 2^c.$$

   [$(a, b, c) = (a, a, a + 1)$, kde a je libovolné přirozené číslo.]
4. V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$2^a + 2^b + 2^c = 2^d.$$

   [$\{a, b, c\} = \{n, n, n + 1\}$, $d = n + 2$, kde n je libovolné přirozené číslo.]

D1. Dokažte, že rovnice $2^x + 2^{x+3} = y^2$ má nekonečně mnoho řešení v oboru přirozených čísel. [Rovnici $2^x(1 + 2^3) = y^2$ zřejmě vyhovují čísla $x = 2k$, $y = 3 \cdot 2^k$ pro libovolné přirozené číslo k.]

D2. Určete všechny dvojice celých kladných čísel m a n, pro něž platí $37+27^m = n^3$. [59–B–S–1]

2. *V oboru reálných čísel řešte rovnici*

$$x^3 + \bigl(3\sqrt{2} - 2\bigr)x^2 - \bigl(1 + \sqrt{2}\bigr)x - 14\bigl(\sqrt{2} - 1\bigr) = 0,$$

víte-li, že má alespoň jeden celočíselný kořen. Případné iracionální kořeny zapište v jednoduchém tvaru bez odmocnin iracionálních čísel.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Dokažte, že mnohočlen $x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x^3 + (\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6})x^2 + 5x - \sqrt{6}$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 - \sqrt{3}\,x + \sqrt{2}$ a najděte podíl těchto dvou mnohočlenů. [$x^2 + \sqrt{2}\,x - \sqrt{3}$]
2. Vyjádřete čísla $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$, $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$, $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$, $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}}$ v jednoduchém tvaru, tj. bez odmocnin iracionálních čísel. [$3 - \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{5}$, $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$]

3. Najděte všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$. [56–B–I–5]

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b taková, že $a > \sqrt{b}$ platí (tzv. *surdické výrazy*)

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2\bigl(a \pm \sqrt{a^2-b}\bigr)},$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

D2. Najděte všechny kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ takové, že pokud libovolný z koeficientů a, b, c zvětšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, který bude mít dvojnásobný kořen. [53–B–II–2]

3. *Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l, které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B. Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q. Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A, B, P, Q leží na jedné kružnici.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Zopakujte s žáky vztahy mezi obvodovým, středovým a úsekovým úhlem a dokažte je.
2. Nechť V_A, V_B, V_C značí paty výšek po řadě z vrcholů A, B, C v daném ostroúhlém trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek. Dokažte následující tvrzení:
   a) osa úsečky V_AV_B prochází středem strany AB,
   b) body A, V, V_B, V_C leží na téže kružnici,
   c) bod V je středem kružnice vepsané trojúhelníku $V_AV_BV_C$.

   [a) Podle Thaletovy věty leží body V_A, V_B na kružnici s průměrem AB, osa sečny V_AV_B této kružnice prochází jejím středem, což je střed AB. b), c) Podle Thaletovy věty leží body V_B, V_C na různých polokružnicích s půměrem AV. Podle věty o obvodovém úhlu $|\sphericalangle V_BV_CV| = |\sphericalangle V_BAV| = 90° - \gamma$. Z tětivového čtyřúhelníku BV_AVV_C podobně dostaneme $|\sphericalangle V_AV_CV| = 90° - \gamma$, tedy VV_C je osou úhlu $V_AV_CV_B$. Podobně dokážeme, že VV_A je osou úhlu $V_BV_AV_C$, tedy V je průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníku $V_AV_BV_C$.]

D1. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší stranou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad stranou AD jako průměrem a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte. [52–B–II–4]

D2. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD. Označme M $(M \neq A)$ průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD. Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD. [56–B–II–3]

D3. Nechť K je libovolný vnitřní bod strany AB daného trojúhelníku ABC. Přímka CK protíná kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě L $(L \neq C)$. Označme k_1 kružnici opsanou trojúhelníku AKL a k_2 kružnici opsanou trojúhelníku BKL.

a) Dokažte, že přímka AC je tečna kružnice k_1, právě když přímka BC je tečna kružnice k_2.
b) Předpokládejme, že přímka AC je sečna kružnice k_1. Nechť P ($P \neq A$) je průsečík přímky AC s kružnicí k_1 a Q ($Q \neq B$) průsečík přímky BC s kružnicí k_2. Dokažte, že bod K leží na úsečce PQ.

[53–A–II–3]

4. *Najděte nejmenší hodnotu zlomku*

$$V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18},$$

kde n je libovolné přirozené číslo větší než 2.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Uvažujme výraz
$$V(x) = \frac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1}.$$
   a) Dokažte, že pro každé reálné číslo x platí $V(x) \geqq 3$.
   b) Najdete největší hodnotu $V(x)$.

   [58–C–II–1]
2. Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, které jsou řešením nerovnice
$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{y\sqrt{x}} < \frac{5\sqrt{y}}{y}.$$
   [51–C–I–3]

D1. Určete všechna reálná čísla p taková, že pro libovolná kladná čísla x, y platí nerovnost
$$\frac{x^3 + py^3}{x + y} \geqq xy.$$
[50–B–II–1]

D2. Pro která celá čísla a je maximum i minimum funkce
$$y = \frac{12x^2 - 12ax}{x^2 + 36}$$
celé číslo? [48–A–I–3]

5. *V rovině je dána úsečka AB. Pro libovolný bod X této roviny, který je různý od A i B, označme X_A, resp. X_B obraz bodu A, resp. B v osové souměrnosti podle přímky XB, resp. XA. Najděte všechny takové body X, které spolu s body X_A, X_B tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nechť P je vnitřní bod konvexního úhlu BAC. Označme K a M obrazy bodu P v osových souměrnostech podle přímek AB a AC. Určete velikost úhlu KAM. [$|\sphericalangle KAM| = 2|\sphericalangle BAC|$, když je úhel BAC ostrý nebo pravý, $|\sphericalangle KAM| = 360^\circ - 2|\sphericalangle BAC|$, když je úhel BAC tupý.]
2. Nechť P je vnitřní bod ostroúhlého trojúhelníku ABC s daným obsahem S. Označme K, L a M obrazy bodu P v osových souměrnostech podle přímek AB, BC a CA. Vypočtěte obsah šestiúhelníku $AKBLCM$ a zjistěte, kdy je tento šestiúhelník pravidelný. [Obsah je vždy $2S$, šestiúhelník je pravidelný pouze v případě, kdy je trojúhelník ABC rovnostranný a bod P je jeho těžiště.]
3. Nechť P je libovolný vnitřní bod rovnostranného trojúhelníku ABC. Uvažujme obrazy K, L a M bodu P v osových souměrnostech s osami AB, BC a CA. Určete množinu všech bodů P takových, že trojúhelník KLM je rovnoramenný. [53–C–I–4]
4. Nechť A a B jsou různé body roviny. Dále je dán orientovaný úhel ω ($0^\circ < \omega < 90^\circ$). Pro libovolný bod X označme po řadě X_A, X_B obrazy bodu X v otočeních kolem středů A a B o úhel ω. Určete všechny body X, pro které je trojúhelník XX_AX_B rovnostranný. [48–B–II–4]

D1. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, jehož vnitřní úhel při vrcholu B má velikost 60°.
   a) Jestliže $|BC| = |CD|$, pak platí $|CD| + |DA| = |AB|$. Dokažte.
   b) Rozhodněte, zda platí opačná implikace.

   [53–A–I–5]

6. *Je dáno přirozené číslo $k < 12$. Ve vrcholech pravidelného dvanáctiúhelníku jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 12$ (jako na ciferníku hodin). V jednom kroku můžeme buď vyměnit některá dvě protilehlá čísla, nebo zvolit libovolných k sousedních vrcholů a v nich napsaná čísla zvětšit o 1. Jako $T(k)$ označme tvrzení, že po konečném počtu kroků lze dostat všech 12 čísel stejných. Dokažte, že $T(2)$ neplatí, $T(5)$ platí, a rozhodněte o platnosti $T(3)$.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Na tabuli jsou napsána celá nezáporná čísla od 0 do 1 234. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla a místo nich na tabuli napíšeme jejich rozdíl (od většího čísla odečteme menší). Tuto operaci opakujeme, dokud na tabuli nezůstane poslední číslo. Může na tabuli zůstat číslo 2? [Ne. Uvedenou operací se nemění parita součtu všech čísel napsaných na tabuli, která je na počátku lichá.]
2. Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 100. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla a místo nich napíšeme na tabuli jejich součet. Tuto operaci opakujeme, dokud na tabuli nezůstanou poslední tři čísla. Můžeme tímto způsobem nakonec získat tři po sobě jdoucí čísla? [Součet tří po sobě jdoucích čísel je dělitelný třemi, kdežto neměnný součet všech čísel na tabuli dělitelný třemi není.]
3. Na stole je n pohárů, všechny jsou postaveny dnem vzhůru. V jednom kroku smíme otočit libovolných k pohárů naopak (k je pevně dáno). Je možné, aby po konečném počtu kroků bylo všech n pohárů postaveno dnem dolů? Řešte nejprve pro $n = 9$ a $k = 5$, potom pro $n = 9$ a $k = 4$. [Pro $n = 9$ a $k = 5$

to zřejmě možné je. Pro $n = 9$ a $k = 4$ to možné není, protože obecněji platí: při sudém k a libovolném n se nemění parita počtu pohárů postavených dnem vzhůru (tj. tento počet je buď pořád sudý, nebo pořád lichý).]

4. Na hranici kruhu stojí 2 jedničky a 48 nul v pořadí $1, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0$. V jednom kroku je povoleno přičíst číslo 1 ke kterýmkoliv dvěma sousedním číslům. Můžeme po několika krocích dosáhnout toho, aby všech 50 čísel bylo stejných? [Není to možné; označte čísla po řadě $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ a vysvětlete, proč výraz $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{49} - x_{50}$ nemění svou hodnotu (nezapomeňte, že spolu sousedí i x_1 a x_{50}).]

D1. Je dáno n ($n \geqq 2$) přirozených čísel, s nimiž můžeme provést následující operaci: vybereme několik z nich, ale ne všechna a nahradíme je jejich aritmetickým průměrem. Zjistěte, zda je možno pro libovolnou počáteční n-tici dostat po konečném počtu kroků všechna čísla stejná, jestliže n se rovná a) 2 000, b) 35, c) 3, d) 17. [51–B–I–4]

D2. Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na počátku, aby po konečném počtu vhodných kroků byla na všech stěnách krychle stejná čísla. [60–A–I–5]

D3. V každém vrcholu pravidelného 2008úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout:
   a) na 8 hromádek po 251 minci,
   b) na 251 hromádek po 8 mincích.
   [58–A–I–5]

D4. Krokem budeme rozumět nahrazení uspořádané trojice celých čísel (p, q, r) trojicí $(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. Rozhodněte, zda existuje celé číslo k takové, že z trojice $(1, 3, 7)$ vznikne po konečném počtu kroků trojice $(k, k + 1, k + 2)$. [52–B–I–4]

D5. Je dáno n nezáporných čísel. Můžeme vybrat libovolná dvě z nich, řekněme a a b, $a \leqq b$, a zaměnit je čísly 0 a $b - a$. Dokažte, že opakováním této operace lze všechna daná čísla změnit na nuly, právě když původní čísla lze rozdělit do dvou skupin tak, že součty čísel v obou skupinách jsou stejné. [51–B–II–4]