Návody k domácí části I. kola kategorie C

1. *Čtvercová tabulka je rozdělena na* 16×16 *políček. Kobylka se po ní pohybuje dvěma směry: vpravo nebo dolů, přičemž střídá skoky o dvě a o tři políčka (to jest žádné dva po sobě jdoucí skoky nejsou stejně dlouhé). Začíná skokem délky dva z levého horního políčka. Kolika různými cestami se může kobylka dostat na pravé dolní políčko? (Cestou rozumíme posloupnost políček, na která kobylka skočí.)*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Kobylka skáče po úsečce délky 10 cm a to skoky o 1 cm nebo o 2 cm (vždy stejným směrem). Kolika způsoby se může dostat z jednoho krajního bodu úsečky do druhého? [Pokud označíme a_n počet způsobů, kolika se může kobylka dostat do bodu vzdáleného n cm od počátečního bodu úsečky, pak pro každé $n \geqq 1$ platí $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Protože $a_1 = 1$ a $a_2 = 2$, můžeme další počty $a_3, a_4, \ldots$ postupně počítat podle vzorce z předchozí věty, až dospějeme k hodnotě $a_{10} = 89$. Při jiném postupu je možno rozdělit všechny cesty podle toho, kolik při nich udělá kobylka skoků délky dva (jejich počet může být 0, 1, 2, 3, 4 nebo 5 a tím je také určen počet skoků délky 1: 10, 8, 6, 4, 2 nebo 0). Ke každému takovému počtu pak určíme počet všech různých pořadí jedniček a dvojek (dávajících v součtu 10). Dostaneme tak $1+9+28+35+15+1 = 89$ možných cest.]
2. Skřítek se pohybuje v tabulce 10×15 skoky o jedno políčko nahoru nebo o jedno políčko doprava. Kolika různými cestami se může dostat z levého dolního do pravého horního políčka? [Skřítek udělá 9 skoků nahoru a 14 skoků doprava. Jeho cestu určíme, když v pořadí všech 23 skoků vybereme těch devět, které povedou nahoru. Počet těchto výběrů 9 prvků z daných 23 je roven zlomku $\dfrac{23\cdot 22\cdot \ldots \cdot 16\cdot 15}{9\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}$, tedy číslu 817 190.]
3. Určete počet dvojic (a, b) celých kladných čísel ($1 \leqq a < b \leqq 86$), pro které je součin ab dělitelný třemi. [C–51–II–1]
4. Určete počet všech čtyřmístných přirozených čísel, která jsou dělitelná šesti a v jejichž zápisu se vyskytují právě dvě jedničky. [C–56–S–1]

2. *Pro kladná reálná čísla* a, b, c, d *platí*

$$a + b = c + d, \qquad ad = bc, \qquad ac + bd = 1.$$

Jakou největší hodnotu může mít součet $a + b + c + d$*?*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Ukažte, že nerovnost $\frac{1}{2}(u + v) \geqq \sqrt{uv}$ mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou libovolných nezáporných čísel u a v plyne ze zřejmé nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$ vhodnou volbou hodnot a a b. [Zvolte $a = \sqrt{u}$ a $b = \sqrt{v}$.] Podobným obratem nebo přímým užitím zmíněné AG-nerovnosti (v některých případech

i několikerým) dokažte další nerovnosti

$$2abc \leqq a^2 + b^2c^2, \quad a^4 + b^4 \geqq a^3b + ab^3, \quad (1 + a + b)^2 \geqq 3(a + b + ab),$$
$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \geqq \frac{8}{(a+b)(c+d)}, \quad \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geqq 8,$$

v nichž a, b, c, d označují libovolná kladná čísla.

2. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost. [59–C–I–5]

3. Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

[58–C–I–6]

4. Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla a, b, c platí

$$(a + bc)(b + ac) \geqq ab(c + 1)^2.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. [58–C–S–1]

5. Splňují-li reálná čísla a, b, c, d rovnosti

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1,$$

platí nerovnost

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leqq 3.$$

Dokažte a zjistěte, kdy přitom nastane rovnost. [55–C–II–2]

6. Nechť a, b, c, d jsou taková reálná čísla, že $a + d = b + c$. Dokažte nerovnost

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) \geqq 0.$$

[54–C–I–1]

3. *Je dán obdélník $ABCD$ s obvodem o. V jeho rovině najděte množinu všech bodů, jejichž součet vzdáleností od přímek AB, BC, CD, DA je roven $\frac{2}{3}o$.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. V rovině je dáno k navzájem různých rovnoběžek. Které body této roviny mají nejmenší součet vzdáleností od zmíněných k rovnoběžek? Odpověď promyslete nejdříve pro malé hodnoty $k = 2, 3, 4, \dots$ a pak podejte zobecnění. [V případě sudého k jde o body pásu mezi dvěma „prostředními“ rovnoběžkami, v případě lichého k jde o body na prostřední rovnoběžce.]
2. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s odvěsnami AC, BC délky 1 cm. V pravém úhlu ACB určete všechny ty body, jejichž součet vzdáleností od ramen CA, CB je roven a) 1 cm, b) 3 cm. [V případě a) pro hledaný bod X

porovnejte obsah útvaru vzniklého slepením trojúhelníků ACX a BCX s obsahem trojúhelníku ABC a vyvoďte odtud, že vyhovující body X vyplní úsečku AB. V případě b) zaměňte body A, B vhodnými body A', B' na ramenech CA, resp. CB a užijte stejný postup jako v případě a).]

3. V rovině jsou dány dvě rovnoběžky a a b vzdálené 1 cm a přímka c k nim kolmá. Určete všechny body roviny, jejichž součet vzdáleností od přímek a, b, c je roven 2 cm. [Rozlište případy, kdy takový bod leží v pásu určeném přímkami a, b a kdy leží v jednom ze čtyř pravých úhlů tvořených přímkou c a jednou z přímek a či b.]
4. Je dána úsečka AB. Sestrojte bod C tak, aby se obsah trojúhelníku ABC rovnal $1/8$ obsahu S čtverce o straně AB a součet obsahů čtverců o stranách AC a BC se rovnal S. Kolik má úloha řešení pro dané umístění úsečky AB v rovině? [C–54–S–3]

4. *Rozhodněte, zda z libovolných sedmi vrcholů daného pravidelného 19úhelníku lze vždy vybrat čtyři, které jsou vrcholy lichoběžníku.*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Užitečný *Dirichletův (přihrádkový) princip* se nejčastěji uvádí s dvěma přirozenými čísly k a n takto: „Je-li alespoň $nk + 1$ předmětů rozděleno do n přihrádek, je v některé z nich alespoň $k + 1$ z těchto předmětů.“ I když jde o velice jednoduché tvrzení (zdůvodněte ho sami), nachází účelné uplatnění v mnoha situacích (často dokonce s hodnotou $k = 1$).

1. Z libovolných 82 přirozených čísel lze vybrat dvě čísla tak, aby jejich rozdíl byl dělitelný číslem 81. Dokažte. [Rozdělte čísla do skupin podle jejich zbytku při dělení číslem 81.]
2. Vybereme-li z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ libovolně 12 různých čísel, pak rozdíl některých dvou z nich bude dvojmístné číslo zapsané dvěma stejnými číslicemi. Dokažte. [Rozdělte čísla do skupin podle jejich zbytku při dělení číslem 11.]
3. Dokažte, že ze 111 různých celých čísel se vždy dá vybrat jedenáct takových, že jejich součet je dělitelný jedenácti. [Využijte toho, že součet 11 čísel se stejným zbytkem při dělení číslem 11 je násobkem čísla 11.]
4. Žádné z daných 17 celých čísel není dělitelné číslem 17. Dokažte, že součet několika z těchto daných čísel je násobkem čísla 17. [Daná čísla označte jako $a_1, \ldots, a_{17}$ a uvažte zbytky 17 součtů $s_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 17)$ při dělení číslem 17; není-li žádný z nich roven 0, dávají dva ze součtů $s_i < s_j$ stejný zbytek modulo 17, takže je číslem 17 dělitelný rozdíl $s_j - s_i$ pro některá $i < j$.]
5. Tabulka 6×6 je zaplněna čísly $-1, 0, 1$. Sečteme čísla v jednotlivých řádcích, sloupcích i obou úhlopříčkách. Dostaneme $6 + 6 + 2 = 14$ součtů. Dokažte, že některé dva z nich se sobě rovnají. [Všechny součty leží v množině celých čísel z intervalu $\langle -6, +6 \rangle$, která má jen 13 prvků.]
6. Jaký největší počet králů můžeme umístit na šachovnici 8×8, aby se žádní dva navzájem neohrožovali? [16. Rozdělte celou šachovnici na 16 dílů 2×2.]
7. Vybereme-li v rovnostranném trojúhelníku o straně a libovolně 10 bodů, pak vzdálenost některých dvou vybraných bodů je nejvýše $a/3$. Dokažte. [Celý trojúhelník rozdělte na 9 rovnostranných trojúhelníků o straně $a/3$.]
8. Deset rodin z jednoho domu trávilo dovolenou v zahraničí. Každá jela jinam a poslala domů pohlednice pěti z ostatních rodin. Dokažte, že některé dvě

rodiny si poslaly pohlednice navzájem. [Všech pohlednic bylo 50, různých dvojprvkových množin $\{\text{odesílatel}, \text{adresát}\}$ je nejvýše $(10 \cdot 9) : 2 = 45$.]

9. Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. (Vysvětlete, proč zvolený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel nevyhovuje.) [58–C–I–5]

5. *Určete všechna celá čísla n, pro něž $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo m je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 60.
2. Určete všechna kladná celá čísla m, pro která je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 120. [C–55–I–1]
3. Pro která dvojmístná čísla n je číslo $n^3 - n$ dělitelné stem? [C–50–S–3]
4. Dokažte, že pro libovolná celá čísla n a k větší než 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ dělitelné dvanácti. [C–59–II–1]

6. *Uvnitř pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ s obsahem $30\,cm^2$ je zvolen bod M. Obsahy trojúhelníků ABM a BCM jsou po řadě $3\,cm^2$ a $2\,cm^2$. Určete obsahy trojúhelníků CDM, DEM, EFM a FAM.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. V daném rovnoběžníku $ABCD$ je bod E střed strany BC a bod F leží uvnitř strany AB. Obsah trojúhelníku AFD je 15 cm^2 a obsah trojúhelníku FBE je 14 cm^2. Určete obsah čtyřúhelníku $FECD$. [57–C–S–2]
2. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu C a P, Q odpovídající paty kolmic vedených bodem D na strany AC a BC. Obsahy trojúhelníků ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočtěte $S_1 : S_3$, jestliže $S_1 : S_2 = 2 : 3$, $S_3 : S_4 = 3 : 8$. [55–C–I–5]
3. Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD. Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$. [55–C–II–1]