62. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *Najděte všechny dvojice prvočísel p, q, pro které existuje přirozené číslo a takové, že*

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

Řešení. Budeme se nejprve zabývat případem, kdy hledaná prvočísla p a q jsou různá. Tehdy jsou čísla pq a $p+q$ nesoudělná: součin pq je totiž dělitelný pouze dvěma prvočísly p a q, zatímco součet $p+q$ žádným z těchto prvočísel dělitelný není.

Zjistíme, které přirozené číslo r může být společným dělitelem čísel $a+1$ a a^2+1. Jestliže $r \mid a+1$ a současně $r \mid a^2+1$, potom $r \mid (a+1)(a-1)$ a také $r \mid (a^2+1) - (a^2-1) = 2$, takže r může být jedině jedno z čísel 1 a 2. Zlomek $\dfrac{a^2+1}{a+1}$ je tedy buď v základním tvaru, anebo základní tvar vznikne vykrácením dvěma, zřejmě podle toho, zda je číslo a sudé či liché.

V případě sudého a tak musí platit

$$pq = a^2+1 \quad \text{a} \quad p+q = a+1.$$

Čísla p, q jsou tudíž kořeny kvadratické rovnice $x^2 - (a+1)x + a^2 + 1 = 0$, jejíž diskriminant

$$(a+1)^2 - 4(a^2+1) = -3a^2 + 2a - 3 = -2a^2 - (a-1)^2 - 2$$

je zřejmě záporný, proto rovnice nemá v množině reálných čísel řešení.

V případě lichého a musí s ohledem na krácení dvěma platit

$$2pq = a^2+1 \quad \text{a} \quad 2(p+q) = a+1.$$

Čísla p, q jsou tudíž kořeny kvadratické rovnice $2x^2 - (a+1)x + a^2 + 1 = 0$, jejíž diskriminant je rovněž záporný. Žádná dvojice různých prvočísel p, q tedy úloze nevyhovuje.

Zbývá rozebrat případ, kdy $p = q$. Potom

$$\frac{p \cdot q}{p+q} = \frac{p \cdot p}{p+p} = \frac{p}{2},$$

takže má platit

$$p = \frac{2(a^2+1)}{a+1} = 2a - 2 + \frac{4}{a+1};$$

to je celé číslo, právě když $a+1 \mid 4$ čili $a \in \{1, 3\}$, takže $p = 2$ nebo $p = 5$.

Úloze tedy vyhovují pouze dvojice $p = q = 2$ a $p = q = 5$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nechť p a q jsou prvočísla. Zjistěte, jaký je největší společný dělitel čísel $p+q$ a p^2+q^2. [$2p$, jestliže $p=q$; 2, jsou-li p a q různá lichá prvočísla; 1, je-li jedno z čísel p, q liché a jedno sudé]
2. Dokažte, že zlomek $\dfrac{21n+4}{14n+3}$, v němž n je přirozené číslo, nelze krátit. [1. MMO, 1959]
3. Určete všechna celá čísla větší než 1, kterými lze krátit některý ze zlomků tvaru $\dfrac{3p-q}{5p+2q}$, kde p a q jsou nesoudělná celá čísla. [58–A–S–3]
4. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že $\dfrac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo. [58–A–I–3]
5. Určete všechny dvojice prvočísel p, q, pro něž platí $p+q^2=q+p^3$. [55–B–II–1]
6. Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňující následující podmínky:
$$p \mid q+r, \quad q \mid r+2p, \quad r \mid p+3q.$$
[55–A–III–5]

2. *Dvě kružnice $k_1(S_1,r_1)$ a $k_2(S_2,r_2)$ se vně dotýkají a leží ve čtverci $ABCD$ o straně a tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD a k_2 se dotýká stran BC a CD. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah nejvýše $\frac{3}{16}a^2$.*

Řešení. Úsečky AS_2 a BS_1 leží na úhlopříčkách daného čtverce, jsou tedy navzájem kolmé a protínají se ve středu P čtverce. Platí

$$|DS_1| = r_1\cdot\sqrt{2},\quad |BS_1| = (a-r_1)\sqrt{2},\quad |PS_1| = \left(\frac{a}{2}-r_1\right)\sqrt{2},$$
$$|CS_2| = r_2\cdot\sqrt{2},\quad |AS_2| = (a-r_2)\sqrt{2},\quad |PS_2| = \left(\frac{a}{2}-r_2\right)\sqrt{2}.$$

Proto má trojúhelník AS_1S_2 obsah

$$S_{AS_1S_2} = \frac{1}{2}|AS_2|\cdot|PS_1| = (a-r_2)\left(\frac{a}{2}-r_1\right)$$

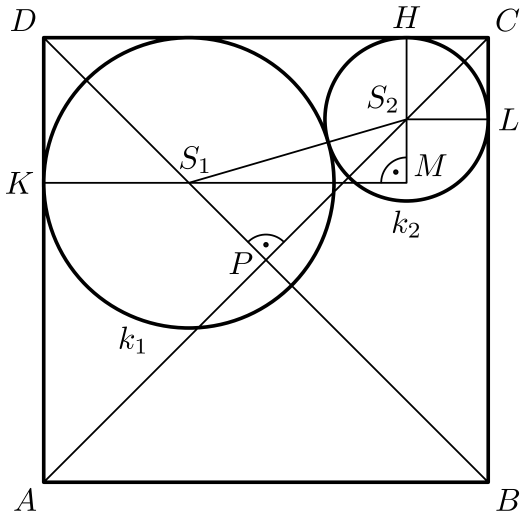
a trojúhelník BS_1S_2 obsah

$$S_{BS_1S_2} = \frac{1}{2}|BS_1|\cdot|PS_2| = (a-r_1)\left(\frac{a}{2}-r_2\right).$$

Součet obou obsahů je

$$S = (a-r_2)\left(\frac{a}{2}-r_1\right) + (a-r_1)\left(\frac{a}{2}-r_2\right) = a^2 - \frac{3}{2}a(r_1+r_2) + 2r_1r_2.$$

Označme K bod dotyku kružnice k_1 se stranou AD, H a L body dotyku kružnice k_2 se stranami CD a BC a M průsečík přímek KS_1 a HS_2 (obr. 1).



Obr. 1

Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník S_1MS_2 je

$$(a - r_1 - r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2.$$

Odtud dostáváme

$$\begin{gathered}(a - r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2,\\ a - r_1 - r_2 = 2\sqrt{r_1r_2},\\ a = r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1r_2} = \left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)^2 \geqq 4\sqrt{r_1r_2}\end{gathered}$$

čili

$$r_1r_2 \leqq \frac{a^2}{16}.$$

Délka úsečky DC zřejmě nemůže být větší než délka lomené čáry KS_1S_2L, takže

$$2r_1 + 2r_2 \geqq a.$$

(To vyplývá i z rovnosti $a = r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1r_2}$, protože podle AG-nerovnosti je $2\sqrt{r_1r_2} \leqq$ $\leqq r_1 + r_2$.) Proto

$$S = a^2 - \frac{3}{2}a(r_1 + r_2) + 2r_1r_2 \leqq a^2 - \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{8}a^2 = \frac{3}{8}a^2.$$

To znamená, že aspoň jeden z obsahů $S_{AS_1S_2}$, $S_{BS_1S_2}$ je nejvýše $\frac{3}{16}a^2$.

Jiné řešení. Můžeme položit $a = 1$. Rozdíl obsahů trojúhelníků AS_1S_2 a BS_1S_2 je (podle vyjádření z původního řešení)

$$S_{AS_1S_2} - S_{BS_1S_2} = (1 - r_2)\left(\frac{1}{2} - r_1\right) - (1 - r_1)\left(\frac{1}{2} - r_2\right) = \frac{1}{2}(r_2 - r_1).$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $r_1 \geqq r_2$. Potom $S_{AS_1S_2} \leqq S_{BS_1S_2}$. Počítejme tedy obsah trojúhelníku AS_1S_2. Podle Pythagorovy věty je $(1 - r_1 - r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 =$ $= (r_1 + r_2)^2$, odtud $\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} = 1$, takže $r_2 = \left(1 - \sqrt{r_1}\right)^2$. Označme $x = \sqrt{r_1}$.

Z nerovností $r_1+r_2 \geqq \frac{1}{2}$ a $r_1 \geqq r_2$ vyplývá $r_1 \geqq \frac{1}{4}$ a z druhé strany platí $r_1 \leqq \frac{1}{2}$, protože kružnice k_1 leží ve čtverci $ABCD$. Odtud plyne $\frac{1}{2} \leqq x \leqq \sqrt{\frac{1}{2}}$. Obsah trojúhelníku AS_1S_2 je

$$\begin{aligned} S_{AS_1S_2} &= (1-r_2)\Big(\frac{1}{2}-r_1\Big) = \frac{1}{2} - r_1 - \frac{r_2}{2} + r_1r_2 = \\ &= \frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 + x^2(1-x)^2 = x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{AS_1S_2} - \frac{3}{16} &= x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{16} = \Big(x-\frac{1}{2}\Big)\Big(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}\Big) = \\ &= \Big(x-\frac{1}{2}\Big)\Big[x^2\Big(x-\frac{3}{2}\Big) - \frac{5}{4}\Big(x - \frac{3}{10}\Big)\Big] \leqq 0 \end{aligned}$$

díky tomu, že $\frac{3}{10} < \frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2} < \frac{3}{2}$. Proto $S_{AS_1S_2} \leqq \frac{3}{16}$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro poloměry r_1, r_2 platí nerovnost $r_1+r_2 \geqq \frac{1}{2}a$ a rovnost $\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2} = \sqrt{a}$.
2. Označme G ten bod střední příčky čtverce $ABCD$ rovnoběžné se stranou AD, jehož vzdálenost od strany AB je trojnásobkem vzdálenosti od strany CD. Dokažte, že G leží ve vnitřní oblasti kružnice k_1, právě když $r_1 > \frac{1}{4}a$.
3. Dokažte, že nemohou současně platit nerovnosti $r_1 > \frac{1}{4}a$ a $r_2 > \frac{1}{4}a$.
4. Dokažte, že obsah trojúhelníku AS_1S_2 je menší než obsah trojúhelníku BS_1S_2, právě když $r_1 > r_2$.
5. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah nejméně $\frac{3}{16}a^2$.
6. Je dána kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a kružnice $k_2(S_2, r_2)$, kde $r_2 < r_1$. Tyto kružnice mají vnitřní dotyk v bodě A. Sestrojte kružnici k_3, která má vnitřní dotyk s kružnicí k_1, vnější dotyk s kružnicí k_2 a dotýká se přímky AS_1. [15–A–II–3]
7. Dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ se vně dotýkají a leží ve čtverci $ABCD$ o straně a tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD a k_2 se dotýká stran BC a AB. Vypočítejte obsah trojúhelníku AS_1S_2. [$\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)a^2$]

3. *Označme $p(n)$ počet všech n-místných čísel složených jen z číslic 1, 2, 3, 4, 5, v nichž se každé dvě sousední číslice liší alespoň o 2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí*

$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

Řešení. Odtržením poslední číslice vyhovujícího $(n+1)$-místného čísla dostaneme vyhovující n-místné číslo. Všimněme si, jak naopak z vyhovujícího n-místného čísla vytvoříme vyhovující $(n+1)$-místné číslo. Končí-li n-místné číslo číslicí 1, můžeme na konec přidat některou z číslic 3, 4, 5. Za číslici 2 můžeme přidat některou z číslic 4, 5, za číslicí 3 může následovat 1 nebo 5, za číslicí 4 může být 1 nebo 2 a za číslici 5 můžeme přidat jednu z číslic 1, 2, 3. Vidíme, že záleží na tom, jaká je poslední číslice. Označme proto a_n počet vyhovujících n-místných čísel zakončených některou z číslic 1, 5, b_n počet čísel zakončených některou z číslic 2, 4 a c_n počet čísel zakončených číslicí 3. Potom $p(n) = a_n + b_n + c_n$. Zřejmě $a_1 = b_1 = 2$, $c_1 = 1$, $p(1) = 5 = 5 \cdot 2{,}4^0 = 5 \cdot 2{,}5^0$, $a_2 = 6$, $b_2 = 4$, $c_2 = 2$, $p(2) = 12 = 5 \cdot 2{,}4^1 < 5 \cdot 2{,}5^1$.

Z předcházejících úvah vyplývá platnost rekurentních vztahů

$$a_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, \quad c_{n+1} = a_n. \tag{1}$$

Z nich vyplývá $a_3 = 14$, $b_3 = 10$, $c_3 = 6$, $p(3) = 30 \in \langle 5 \cdot 2{,}4^2; 5 \cdot 2{,}5^2 \rangle$.

Matematickou indukcí dokážeme, že pro každé $n \geqq 3$ platí

$$a_n \geqq 2{,}4^n, \quad b_n \geqq \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n, \quad c_n \geqq 2{,}4^{n-1}.$$

Pro $n = 3$ to platí. Jestliže $a_n \geqq 2{,}4^n$, $b_n \geqq \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n$ a $c_n \geqq 2{,}4^{n-1}$, tak i

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n \geqq 2{,}4^n + \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n + 2 \cdot 2{,}4^{n-1} &= \\ = 2{,}4^n \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) &= 2{,}5 \cdot 2{,}4^n > 2{,}4^{n+1}, \\ b_{n+1} = a_n + b_n \geqq 2{,}4^n + \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n = \frac{5}{3} \cdot 2{,}4^n > \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^{n+1}&, \\ c_{n+1} = a_n \geqq 2{,}4^n.& \end{aligned}$$

Z právě dokázaných nerovností vyplývá

$$p(n) = a_n + b_n + c_n \geqq 2{,}4^n + \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n + 2{,}4^{n-1} = (2{,}4 + 1{,}6 + 1) \cdot 2{,}4^{n-1} = 5 \cdot 2{,}4^{n-1}.$$

Podobně dokážeme druhou nerovnost; ověříme, že pro $n \geqq 3$ platí

$$a_n \leqq k \cdot 2{,}5^n, \quad b_n \leqq k \cdot \frac{2}{3} \cdot 2{,}5^n, \quad c_n \leqq k \cdot 2{,}5^{n-1}, \tag{2}$$

kde k je vhodně zvolené číslo. Potom bude

$$p(n) = a_n + b_n + c_n \leqq k \cdot 2{,}5^{n-1} \cdot \left(2{,}5 + \frac{5}{3} + 1\right) = k \cdot 2{,}5^{n-1} \cdot \frac{31}{6} = 5k \cdot \frac{31}{30} \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

Zvolíme-li tedy $k = \frac{30}{31}$, bude pro každé $n \geqq 3$ platit $p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}$.

Zbývá matematickou indukcí dokázat nerovnosti (2), v nichž $k = \frac{30}{31}$. Pro $n = 3$ nerovnosti platí. Platí-li (2), je rovněž

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n \leqq k \cdot 2{,}5^n \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) &= k \cdot 2{,}5^n \cdot \frac{37}{15} < k \cdot 2{,}5^{n+1}, \\ b_{n+1} = a_n + b_n \leqq k \cdot 2{,}5^n \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) &= k \cdot \frac{2}{3} \cdot 2{,}5^{n+1}, \\ c_{n+1} = a_n \leqq k \cdot 2{,}5^n.& \end{aligned}$$

Jiné řešení. Ukážeme, že každá z posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, jež byly zavedeny v předchozím řešení, splňuje v důsledku rovností (1) rekurentní rovnici $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n - 2x_{n-1}$, takže ji splňuje i posloupnost zkoumaných hodnot $p(n) = a_n + b_n + c_n$, což dále zapíšeme vztahem (3).

Skutečně, z první a třetí rovnosti (1) dostáváme $a_{n+1} = a_n + b_n + 2a_{n-1}$, odkud

$$b_n = a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1}, \quad \text{a tedy i} \quad b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n.$$

S přihlédnutím k druhé rovnosti (1) tak platí

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = b_{n+1} = a_n + b_n = a_n + (a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1}),$$

odkud porovnáním krajních výrazů vychází avizovaná rovnost

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n - 2a_{n-1}.$$

Nyní trojím dosazením $a_n = b_{n+1} - b_n$ do rovnosti $b_n = a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1}$ dostaneme

$$b_n = (b_{n+2} - b_{n+1}) - (b_{n+1} - b_n) - 2(b_n - b_{n-1}),$$

odkud po úpravě vychází

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + 2b_n - 2b_{n-1}.$$

Konečně posloupnost $\{c_n\}$ je jen „posunutá“ posloupnost $\{a_n\}$, takže

$$c_{n+2} = a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2c_{n+1} + 2c_n - 2c_{n-1}.$$

Spojením všech tří rekurencí máme

$$p(n+2) = 2p(n+1) + 2p(n) - 2p(n-1). \tag{3}$$

Matematickou indukcí dokážeme, že pro každé $k \geqq 1$ platí

$$2{,}4p(k) \leqq p(k+1) \leqq 2{,}5p(k). \tag{4}$$

Pro $k = 1$ i pro $k = 2$ nerovnosti (4) platí. Platí-li (4) pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n+1, n+2\}$, potom

$$\begin{aligned} p(n+3) &= 2\big(p(n+2) + p(n+1) - p(n)\big) \geqq \\ &\geqq 2\Big(p(n+2) + p(n+1) - \frac{p(n+1)}{2{,}4}\Big) = 2\Big(p(n+2) + \frac{7p(n+1)}{12}\Big) \geqq \\ &\geqq 2\Big(p(n+2) + \frac{7}{12} \cdot \frac{p(n+2)}{2{,}5}\Big) = \frac{74p(n+2)}{30} > 2{,}4p(n+2). \end{aligned}$$

Podobně také

$$\begin{aligned} p(n+3) &\leqq 2\Big(p(n+2) + p(n+1) - \frac{p(n+1)}{2{,}5}\Big) \leqq \\ &\leqq 2\Big(p(n+2) + \frac{3}{5} \cdot \frac{p(n+2)}{2{,}4}\Big) = 2{,}5p(n+2). \end{aligned}$$

Z rovností $5 \cdot 2{,}4^0 = p(1) = 5 \cdot 2{,}5^0$ a nerovností (4) vyplývá, že nerovnost $5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}$ platí pro každé přirozené n.

Poznámka. Rovnice (3) se nazývá *lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty.* Známý rekurentní vztah $g_{n+1} = g_n \cdot q$ pro geometrické posloupnosti napovídá, že rovnici (3) by mohly vyhovovat některé geometrické posloupnosti, tedy $p(n) = q^n$. Dosazením do (3) dostaneme pro kvocient q tzv. *charakteristickou rovnici*

$$q^3 - 2q^2 - 2q + 2 = 0,$$

která má tři reálné kořeny $q_1 \doteq -1{,}170\,086\,487$, $q_2 \doteq 0{,}688\,892\,182$, $q_3 \doteq 2{,}481\,194\,304$. Dá se dokázat, že každé řešení rovnice (3) je lineární kombinací posloupností $\{q_1^n\}$, $\{q_2^n\}$ a $\{q_3^n\}$, tedy

$$p(n) = \alpha \cdot q_1^n + \beta \cdot q_2^n + \gamma \cdot q_3^n.$$

Koeficienty α, β, γ vypočítáme ze soustavy rovnic

$$\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = p(1) = 5, \quad \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 + \gamma q_3^2 = p(2) = 12, \quad \alpha q_1^3 + \beta q_2^3 + \gamma q_3^3 = p(3) = 30.$$

Místo třetí rovnice lze použít $\alpha + \beta + \gamma = p(0) = 2$; číslo $p(0)$ se sice nedá definovat jako počet 0-místných čísel, ale $p(0) = 2$ odpovídá vztahu (3). Pro členy posloupnosti tak dostaneme přibližné vyjádření

$$p(n) \approx -0{,}063\,627\,546q_1^n + 0{,}108\,637\,179q_2^n + 1{,}954\,990\,367q_3^n.$$

(Tato přibližná rovnost se dá použít zhruba až po $n = 20$, pro větší n už se projeví zaokrouhlovací chyby.)

Návodné a doplňující úlohy:

1. Označme p_n počet všech n-místných čísel složených jen z číslic 1 a 2, v nichž se nevyskytují dvě jednotky vedle sebe. Dokažte, že $p_n = F_{n+3}$, kde F_k je k-tý člen Fibonacciho posloupnosti.
2. Označme p_n počet všech n-místných čísel složených jen z číslic 1, 2, 3, v nichž se nevyskytují tři stejné číslice vedle sebe. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí $p_n > 2{,}7^n$.
3. Označme p_n počet všech n-místných čísel, v jejichž dekadickém zápise se vyskytují vedle sebe dvě nuly. Dokažte, že
$$p_n = 9 \cdot 10^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{117}} \cdot \left[\left(\frac{9+\sqrt{117}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{9-\sqrt{117}}{2}\right)^{n+1}\right].$$
4. Po vrcholech pravidelného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ skáče klokan. Každým skokem se přemisťuje z jednoho vrcholu do některého z obou sousedních; začíná v A a zastaví se, jakmile se poprvé dostane do E. Označme a_n počet všech různých cest z A do E složených právě z n skoků. Dokažte, že pro všechna $k = 1, 2, 3, \ldots$ platí
$$a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1}),$$
kde $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$. [21. MMO, 1979]

4. *Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna nenulová čísla x, y platí*
$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

Řešení. Dosazením $x = 1$ dostaneme
$$f(y) + f(-y) = f(1).$$
Označíme-li $f(1) = a$, máme $f(-y) = a - f(y)$. Dosaďme ještě $y = -1$, takže
$$x \cdot f(-x) + f(1) = x \cdot f(x)$$
čili
$$x\bigl(a - f(x)\bigr) + a = x \cdot f(x)$$
a odtud
$$f(x) = \frac{a(x+1)}{2x} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$
Zkouškou ověříme, že pro libovolné reálné c vyhovuje každá funkce $f(x) = c(1 + 1/x)$:
$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot c\left(1 + \frac{1}{xy}\right) + c\left(1 + \frac{1}{-y}\right) = c\left(x + \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y}\right) =$$
$$= c(x+1) = cx\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \cdot f(x).$$

Jiné řešení. Označme $f(1) = a$. Dosazením $y = -1$ do dané rovnice dostaneme
$$xf(-x) + a = xf(x)$$
neboli
$$f(-x) = f(x) - \frac{a}{x}. \tag{1}$$

Danou rovnici upravíme na tvar

$$f(xy) + \frac{1}{x} \cdot f(-y) = f(x),$$

z něhož pomocí (1) máme

$$f(xy) + \frac{1}{x}\Big(f(y) - \frac{a}{y}\Big) = f(x),$$

$$f(xy) + \frac{f(y)}{x} - \frac{a}{xy} = f(x).$$

Záměnou x a y navíc dostaneme

$$f(yx) + \frac{f(x)}{y} - \frac{a}{yx} = f(y),$$

takže odečtením posledních dvou rovnic

$$\frac{f(x)}{y} - \frac{f(y)}{x} = f(y) - f(x)$$

a dosazením $y = 1$ vyjde

$$2f(x) = a\Big(1 + \frac{1}{x}\Big).$$

Snadno se opět přesvědčíme, že každá funkce $f(x) = c(1 + 1/x)$ je řešením dané funkcionální rovnice.

Návodné a doplňující úlohy:

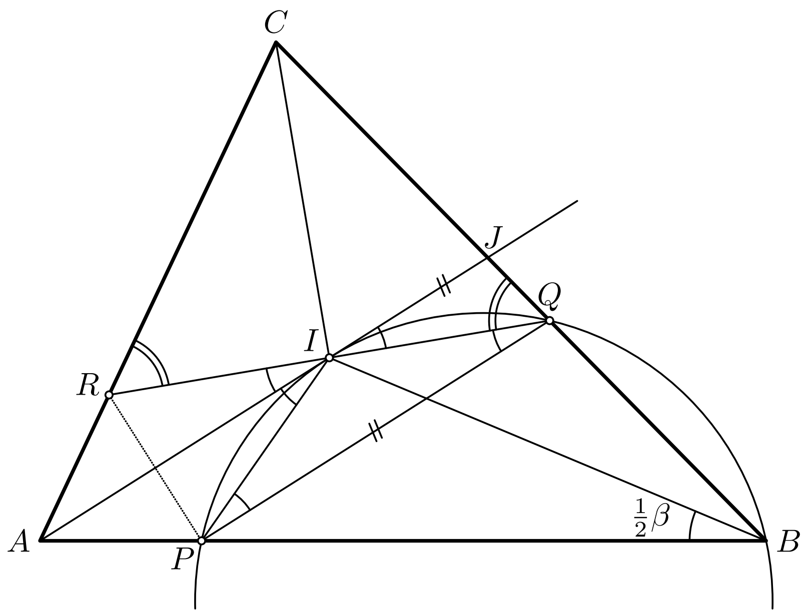
1. Najděte všechny funkce $f\colon \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$, které vyhovují současně následujícím třem podmínkám:
   a) Pro libovolná nezáporná čísla x a y taková, že $x + y > 0$, platí rovnost
   $$f\left(xf(y)\right) f(y) = f\Big(\frac{xy}{x+y}\Big);$$
   b) $f(1) = 0$;
   c) $f(x) > 0$ pro libovolné $x > 1$. [54–A–I–6]
2. Nechť $\mathbb{R}_+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}_+ \to$ $\to \mathbb{R}_+$, které pro libovolná kladná čísla x, y splňují rovnost
   $$x^2\left(f(x) + f(y)\right) = (x+y)f\left(f(x)y\right).$$
   [53–A–III–6]
3. Nechť $\mathbb{R}_+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\colon$ $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ splňující pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}_+$ rovnost
   $$f\left(xf(y)\right) = f(xy) + x.$$
   [51–A–III–6]
4. Označme $\mathbb{R}_+$ množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}_+ \to$ $\to \mathbb{R}_+$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}_+$ platí
   $$f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f\left(x \cdot f(y)\right) + \frac{1}{xy}.$$
   [60–A–III–6]
   Užitečné informace o funkcionálních rovnicích jsou například na

   `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~franta/bakalarka`.

5. *Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Kružnice, která prochází vrcholem B a dotýká se přímky AI v bodě I, protíná strany AB, BC postupně v bodech P, Q. Průsečík přímky QI se stranou AC označme R. Dokažte, že platí*

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

Řešení. Označme α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC při vrcholech A, B, C a J průsečík přímky AI se stranou BC (obr. 2). Úhel PBI je obvodový úhel příslušný k tětivě PI a úhel QBI je obvodový úhel příslušný k tětivě IQ. Protože oba tyto obvodové úhly mají stejnou velikost $\frac{1}{2}\beta$, mají úsečky PI a IQ stejnou délku.



Obr. 2

Úsekový úhel JIQ je shodný s obvodovým úhlem QBI, jeho velikost je proto $\frac{1}{2}\beta$. Ze shodnosti vrcholových úhlů potom vyplývá $|\sphericalangle RIA| = \frac{1}{2}\beta$. Stejnou velikost má i úsekový úhel PIA, jenž je shodný s obvodovým úhlem PBI. Dále platí $|\sphericalangle RAI| = |\sphericalangle PAI| = \frac{1}{2}\alpha$. Podle věty *usu* jsou trojúhelníky RIA a PIA shodné, a proto $|RI| = |PI|$.

Úhel QIB má tedy velikost

$$|\sphericalangle QIB| = 180° - |\sphericalangle AIB| - |\sphericalangle JIQ| = 180° - \left(90° + \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\beta}{2} =$$
$$= 90° - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} = |\sphericalangle RAI|.$$

Velikost úhlu QIB se dá určit i následovně: Podle věty o úsekovém úhlu platí $|\sphericalangle AIP| = \frac{1}{2}\beta = |\sphericalangle IPQ|$. Ze shodnosti střídavých úhlů vyplývá $AI \parallel PQ$. Odtud $|\sphericalangle QPB| = |\sphericalangle IAB| = \frac{1}{2}\alpha$ a ze shodnosti obvodových úhlů máme $|\sphericalangle QIB| = \frac{1}{2}\alpha$.

Ze shodnosti úhlů $|\sphericalangle QIB| = |\sphericalangle RAI|$ a $|\sphericalangle QBI| = |\sphericalangle RIA|$ vyplývá podobnost trojúhelníků $AIR \sim IBQ$ neboli $|AR|/|RI| = |IQ|/|QB|$, takže

$$|AR| \cdot |QB| = |RI| \cdot |IQ| = |PI|^2.$$

K důkazu podobnosti trojúhelníků AIR a IBQ může posloužit i rovnoramennost trojúhelníku CRQ, v němž je totiž osa úhlu současně těžnicí.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že v dané situaci platí:
   a) $|\sphericalangle JIQ| = |\sphericalangle RIA| = |\sphericalangle PIA| = |\sphericalangle IPQ| = |\sphericalangle PBI| = |\sphericalangle QBI| = \frac{1}{2}\beta$;
   b) $PQ \parallel AI$;
   c) $|\sphericalangle QIB| = |\sphericalangle QPB| = |\sphericalangle IAP| = |\sphericalangle RAI| = \frac{1}{2}\alpha$;
   d) $|CR| = |CQ|$;
   e) $|\sphericalangle BQR| = |\sphericalangle ARQ| = 90° + \frac{1}{2}\gamma$.
2. Do kružnice k je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD není průměrem. Dokažte, že průsečík přímek, které se kružnice k dotýkají v bodech B a D, leží na přímce AC, právě když platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$. [51–A–II–3]
3. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné. [59–A–II–2]
4. Nechť M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme S, S_1, S_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC, AMC, BMC.
   a) Dokažte, že body M, C, S_1, S_2 a S leží na jedné kružnici.
   b) Pro kterou polohu bodu M má tato kružnice nejmenší poloměr? [56–A–II–3]
5. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na jedné kružnici. [53–A–III–5]

6. *V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 y &= \operatorname{tg}^2 z,\\ \sin^2 y + \cos^2 z &= \operatorname{tg}^2 x,\\ \sin^2 z + \cos^2 x &= \operatorname{tg}^2 y.\end{aligned}$$

Řešení. Substitucí $\cos^2 x = a$, $\cos^2 y = b$, $\cos^2 z = c$ vznikne soustava

$$\begin{aligned}1 - a + b &= \frac{1}{c} - 1,\\ 1 - b + c &= \frac{1}{a} - 1,\\ 1 - c + a &= \frac{1}{b} - 1,\end{aligned} \tag{1}$$

přičemž $a, b, c \in (0,1\rangle$.

Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6,$$

tedy harmonický průměr čísel a, b, c je $\frac{1}{2}$.

Po vynásobení rovnic postupně čísly c, a, b máme

$$\begin{aligned}c - ac + bc &= 1 - c,\\ a - ab + ac &= 1 - a,\\ b - bc + ab &= 1 - b\end{aligned}$$

a po sečtení $2(a+b+c) = 3$. Aritmetický průměr čísel a, b, c je tedy rovněž $\frac{1}{2}$. Z rovnosti aritmetického a harmonického průměru vyplývají rovnosti $a = b = c = \frac{1}{2}$. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že tato trojice vyhovuje soustavě (1). Řešením původně zadané soustavy jsou tudíž všechny trojice $(\frac14\pi+\frac12k\pi, \frac14\pi+\frac12l\pi, \frac14\pi+\frac12m\pi)$, kde k, l, m jsou celá čísla.

Jiné řešení. Použijeme substituci z prvního řešení. Soustava (1) je cyklická; je-li jejím řešením trojice (p,q,r), vyhovují jí i trojice (q,r,p) a (r,p,q). Stačí tedy najít jen ta řešení, pro něž platí $a \geqq b$, $a \geqq c$, a všechna ostatní řešení dostaneme cyklickou záměnou.

Nechť tedy $a \geqq b$, $a \geqq c$. Z první rovnice potom vyplývá $1/c = 2-a+b \leqq 2$, a proto $c \geqq \frac12$. Podobně ze třetí rovnice $1/b = 2-c+a \geqq 2$, proto $b \leqq \frac12$, a tedy i $b \leqq c$. Podle druhé rovnice pak je $1/a = 2-b+c \geqq 2$, takže $a \leqq \frac12$. Dohromady tedy platí

$$\frac12 \geqq a \geqq c \geqq \frac12,$$

a proto $a = c = \frac12$. Nyní už z kterékoliv rovnice soustavy (1) dostaneme $b = \frac12$. Stejně jako v předchozím případě ověříme, že nalezená trojice soustavě (1) vyhovuje, takže řešením dané soustavy jsou všechny trojice $(\frac14\pi+\frac12k\pi, \frac14\pi+\frac12l\pi, \frac14\pi+\frac12m\pi)$, kde k, l, m jsou celá čísla.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nerovnost
$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqq \frac{n}{1/a_1+1/a_2+\ldots+1/a_n}$$
mezi aritmetickým a harmonickým průměrem libovolných kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ odvoďte dvojím užitím známější nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Ukažte přitom, že rovnost v odvozené nerovnosti nastane, jedině když $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. [Doporučenou AG-nerovnost zapište jak pro n-tici uvažovaných čísel a_i, tak pro n-tici čísel k nim převrácených a zapsané nerovnosti pak mezi sebou vynásobte. Tvrzení o rovnosti plyne z obdobného tvrzení o rovnosti v AG-nerovnosti.]
2. V množině reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$x^2+\frac{1}{y^2}=2,\quad y^2+\frac{1}{z^2}=2,\quad z^2+\frac{1}{w^2}=2,\quad w^2+\frac{1}{x^2}=2.$$
[$x^2 = y^2 = z^2 = w^2 = 1$, tedy 16 řešení]
3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$x^2-y=z^2,\quad y^2-z=x^2,\quad z^2-x=y^2.$$
[57–A–S–1]
4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$\sqrt{x-y^2}=z-1,\quad \sqrt{y-z^2}=x-1,\quad \sqrt{z-x^2}=y-1.$$
[59–A–S–1]
5. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$\sqrt{x^2-y}=z-1,\quad \sqrt{y^2-z}=x-1,\quad \sqrt{z^2-x}=y-1.$$
[59–A–I–1]
6. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$x^2+2yz=6(y+z-2),\quad y^2+2zx=6(z+x-2),\quad z^2+2xy=6(x+y-2).$$
[53–A–S–3]
7. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic
$$x^2=\frac1y+\frac1z,\quad y^2=\frac1z+\frac1x,\quad z^2=\frac1x+\frac1y.$$
[53–A–I–6]

8. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x(y+z+1)=y^2+z^2-5,\;\; y(z+x+1)=z^2+x^2-5,\;\; z(x+y+1)=x^2+y^2-5.$$

[54–A–II–2]

9. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2-1=p(y+z),\quad y^2-1=p(z+x),\quad z^2-1=p(x+y)$$

s neznámými x, y, z a parametrem p. Vykonejte diskusi počtu řešení. [51–A–II–4]

10. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^4+y^2+4=5yz,\quad y^4+z^2+4=5zx,\quad z^4+x^2+4=5xy.$$

[61–A–III–6]