62. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Určete všechny trojice* (a, b, c) *přirozených čísel, pro které platí*

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

ŘEŠENÍ. Danou rovnici můžeme přepsat jako $2^a + 2^{2b} = 2^{3c}$. Abychom mohli výraz na levé straně vydělit mocninou dvojky, pomůžeme se označením $m = \min(a, 2b)$, $M = \max(a, 2b)$, $0 < m \leqq M$, takže

$$2^a + 2^{2b} = 2^m(2^{M-m} + 1).$$

Číslo $2^{M-m} + 1$ v závorce je pro $M > m$ zřejmě liché číslo větší než 1, takže to nemůže být dělitel mocniny 2^{3c}, která je na pravé straně dané rovnice. Nutně tedy musí být $M = m$, odkud plyne $a = 2b$ a porovnáním obou stran upravené rovnice i $2b + 1 = 3c$. Protože $2b+1$ je liché číslo, musí být číslo c rovněž liché, existuje tudíž přirozené číslo n, pro něž platí $c = 2n - 1$. Z rovnice $2b + 1 = 3c$ dopočítáme $b = 3n - 2$ a $a = 2b = 6n - 4$.

Pro libovolné přirozené číslo n je trojice $(a, b, c) = (6n - 4, 3n - 2, 2n - 1)$ řešením dané rovnice, jak můžeme ověřit zkouškou, která při tomto postupu není nutná.

Poznámka. Ze zápisu $2^a + 2^{2b} = 2^{3c}$ a z jednoznačnosti zápisu čísla v dvojkové soustavě okamžitě plyne, že musí být $a = 2b$, a tudíž $3c = a + 1$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž platí $2^a - 16^b = 0$ [$(a, b) = (4b, b)$, kde b je libovolné přirozené číslo.]
2. Určete všechny čtveřice (a, b, c, d) celých nezáporných čísel splňující rovnici
$$2^a 3^b 4^c = 16^d.$$
[$(a, b, c, d) = (4d - 2c, 0, c, d)$, kde c, d jsou libovolná celá nezáporná čísla, pro která platí $c \leqq 2d$.]
3. V oboru přirozených čísel řešte rovnici
$$2^a + 2^b = 2^c.$$
[$(a, b, c) = (a, a, a + 1)$, kde a je libovolné přirozené číslo.]
4. V oboru přirozených čísel řešte rovnici
$$2^a + 2^b + 2^c = 2^d.$$
[$\{a, b, c\} = \{n, n, n + 1\}$, $d = n + 2$, kde n je libovolné přirozené číslo.]

D1. Dokažte, že rovnice $2^x + 2^{x+3} = y^2$ má nekonečně mnoho řešení v oboru přirozených čísel. [Rovnici $2^x(1 + 2^3) = y^2$ zřejmě vyhovují čísla $x = 2k$, $y = 3 \cdot 2^{2k}$ pro libovolné přirozené číslo k.]

D2. Určete všechny dvojice celých kladných čísel m a n, pro něž platí $37 + 27^m = n^3$. [59–B–S–1]

2. *V oboru reálných čísel řešte rovnici*

$$x^3 + \big(3\sqrt{2} - 2\big)x^2 - \big(1 + \sqrt{2}\big)x - 14\big(\sqrt{2} - 1\big) = 0,$$

víte-li, že má alespoň jeden celočíselný kořen. Případné iracionální kořeny zapište v jednoduchém tvaru bez odmocnin iracionálních čísel.

Řešení. Danou rovnici přepišme do tvaru

$$\sqrt{2}\,(3x^2 - x - 14) + (x^3 - 2x^2 - x + 14) = 0. \tag{1}$$

Odtud plyne, že každý celočíselný kořen dané rovnice musí být kořenem rovnice

$$3x^2 - x - 14 = 0,$$

jinak by se iracionální číslo $\sqrt{2}$ dalo z rovnice (1) vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. Tato kvadratická rovnice má kořeny -2 a $\frac{7}{3}$, z nichž pouze ten první je kořenem i původní rovnice, jak se snadno přesvědčíme dosazením obou čísel do upravené rovnice (1).

Našli jsme tedy kořen $x_1 = -2$ dané kubické rovnice. Její zbývající kořeny jsou kořeny kvadratické rovnice, kterou dostaneme, když původní rovnici vydělíme kořenovým činitelem $x + 2$. Dostaneme tak

$$\big(x^3 + \big(3\sqrt{2} - 2\big)x^2 - \big(1 + \sqrt{2}\big)x - 14\big(\sqrt{2} - 1\big)\big) : (x + 2) = x^2 + \big(3\sqrt{2} - 4\big)x - 7\big(\sqrt{2} - 1\big) = 0.$$

Diskriminant D nalezené kvadratické rovnice je kladné iracionální číslo

$$D = \big(3\sqrt{2} - 4\big)^2 + 28\big(\sqrt{2} - 1\big) = 6 + 4\sqrt{2}.$$

Abychom se vyhnuli v zápisu zbylých kořenů odmocninám iracionálních čísel, hledejme hodnotu $\sqrt{D}$ ve tvaru

$$\sqrt{D} = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$$

s racionálními koeficienty a, b. Ty lze snadno uhodnout, neboť po umocnění na druhou dostáváme

$$6 + 4\sqrt{2} = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2},$$

odkud $a^2 + 2b^2 = 6$ a $2ab = 4$, takže je nasnadě, že vyhovují hodnoty $a = 2$ a $b = 1$. (Místo hádání můžeme po dosazení $b = 2/a$ řešit pro neznámou a^2 kvadratickou rovnici $a^2 + 2 \cdot (2/a)^2 = 6$, ze které vychází $a^2 = 2$ nebo $a^2 = 4$.)

Je tedy $\sqrt{D} = 2 + \sqrt{2}$, takže zbývajícími kořeny $x_{2,3}$ dané rovnice jsou čísla

$$x_2 = \frac{4 - 3\sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})}{2} = 3 - \sqrt{2} \quad \text{a} \quad x_3 = \frac{4 - 3\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})}{2} = 1 - 2\sqrt{2}.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že mnohočlen $x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x^3 + (\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6})x^2 + 5x - \sqrt{6}$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 - \sqrt{3}\,x + \sqrt{2}$ a najděte podíl těchto dvou mnohočlenů. [$x^2 + \sqrt{2}\,x - \sqrt{3}$]
2. Vyjádřete čísla $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$, $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$, $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$, $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}}$ v jednoduchém tvaru, tj. bez odmocnin iracionálních čísel. [$3 - \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{5}$, $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$]
3. Najděte všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$. [56–B–I–5]

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b taková, že $a > \sqrt{b}$ platí (tzv. *surdické výrazy*)

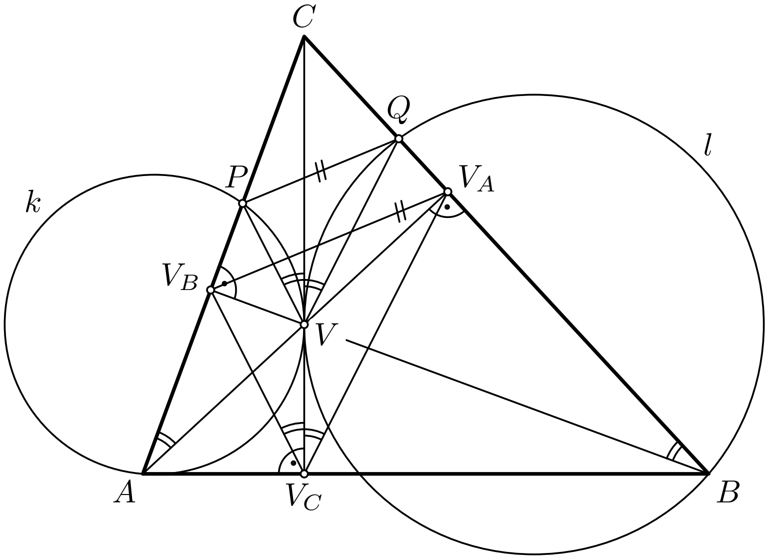
$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})},$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

D2. Najděte všechny kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ takové, že pokud libovolný z koeficientů a, b, c zvětšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, který bude mít dvojnásobný kořen. [53–B–II–2]

3. *Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l, které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B. Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q. Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A, B, P, Q leží na jedné kružnici.*

Řešení. Označme velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC obvyklým způsobem a V_A, V_B, V_C paty jeho výšek po řadě z vrcholů A, B, C (obr. 1).



Obr. 1

Trojúhelník AV_AC je pravoúhlý a platí $|\sphericalangle VAC| = |\sphericalangle V_AAC| = 90° - \gamma$. Podobně platí i $|\sphericalangle VBC| = |\sphericalangle V_BBC| = 90° - \gamma$. Z rovnosti úsekového a obvodového úhlu pro tětivu PV kružnice k vychází $|\sphericalangle CVP| = |\sphericalangle VAC| = 90° - \gamma$. A obdobně pro tětivu QV kružnice l máme $|\sphericalangle CVQ| = |\sphericalangle VBC| = 90° - \gamma$. Polopřímka VC je tedy osou úhlu PVQ, což jsme chtěli dokázat.

Druhou část tvrzení můžeme dokázat následujícím způsobem. Podle Thaletovy věty leží body V_A a V_C na Thaletově kružnici nad průměrem AC. Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou V_AC této kružnice plyne $|\sphericalangle V_AAC| = |\sphericalangle V_AV_CC| = 90° - \gamma$. Úsečky V_AV_C a QV jsou tedy rovnoběžné, protože svírají s přímkou CV_C stejný úhel. Podobně zjistíme, že i úsečky V_BV_C a PV jsou rovnoběžné. Odtud vidíme, že trojúhelník $V_AV_BV_C$ je obrazem trojúhelníku QPV ve stejnolehlosti se středem v bodě C, která zobrazuje bod V_C na bod V. Proto jsou úsečky V_AV_B a QP rovnoběžné.

Podle Thaletovy věty leží body V_A a V_B na Thaletově kružnici nad průměrem AB, z vlastností tětivového čtyřúhelníku ABV_AV_B tak plyne $|\sphericalangle PQC| = |\sphericalangle V_BV_AC| = \alpha$, $|\sphericalangle QPC| = |\sphericalangle V_AV_BC| = \beta$. Tyto rovnosti už jak známo zaručují, že také čtyřúhelník $ABQP$ je tětivový, tudíž jeho vrcholy leží na jedné kružnici, jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Druhá část tvrzení též snadno plyne z vlastností mocnosti bodu ke kružnici: Mocnost bodu C ke kružnici k je rovna $|CV|^2 = |CP| \cdot |CA|$. Podobně mocnost bodu C ke kružnici l je rovna $|CV|^2 = |CQ| \cdot |CB|$. Proto $|CP| \cdot |CA| = |CQ| \cdot |CB|$, což je ekvivalentní s tím, že body A, B, P, Q leží na téže kružnici.

Totéž můžeme formulovat i bez počítání, využijeme-li poznatku o chordálách[1] tří

[1] Chordála dvou kružnic je množina bodů, jež mají k oběma kružnicím stejnou mocnost, což v případě protínajících se kružnic je jejich společná sečna.

kružnic: Označme m kružnici opsanou trojúhelníku ABP. Protože CV je chordálou kružnic k a l a AC chordálou kružnic k a m, je BC chordálou kružnic l a m. Odtud plyne, že kružnice l a m se protínají v bodě Q.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Zopakujte s žáky vztahy mezi obvodovým, středovým a úsekovým úhlem a dokažte je.
2. Nechť V_A, V_B, V_C značí paty výšek po řadě z vrcholů A, B, C v daném ostroúhlém trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek. Dokažte následující tvrzení:
   a) osa úsečky V_AV_B prochází středem strany AB,
   b) body A, V, V_B, V_C leží na téže kružnici,
   c) bod V je středem kružnice vepsané trojúhelníku $V_AV_BV_C$.
   [a) Podle Thaletovy věty leží body V_A, V_B na kružnici s průměrem AB, osa sečny V_AV_B této kružnice prochází jejím středem, což je střed AB. b), c) Podle Thaletovy věty leží body V_B, V_C na různých polokružnicích s půměrem AV. Podle věty o obvodovém úhlu $|\sphericalangle V_BV_CV| = |\sphericalangle V_BAV| = 90° - \gamma$. Z tětivového čtyřúhelníku BV_AVV_C podobně dostaneme $|\sphericalangle V_AV_CV| = 90° - \gamma$, tedy VV_C je osou úhlu $V_AV_CV_B$. Podobně dokážeme, že VV_A je osou úhlu $V_BV_AV_C$, tedy V je průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníku $V_AV_BV_C$.]

D1. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší stranou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad stranou AD jako průměrem a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte. [52–B–II–4]

D2. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD. Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD. Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD. [56–B–II–3]

D3. Nechť K je libovolný vnitřní bod strany AB daného trojúhelníku ABC. Přímka CK protíná kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnici opsanou trojúhelníku AKL a k_2 kružnici opsanou trojúhelníku BKL.
   a) Dokažte, že přímka AC je tečna kružnice k_1, právě když přímka BC je tečna kružnice k_2.
   b) Předpokládejme, že přímka AC je sečna kružnice k_1. Nechť P ($P \neq A$) je průsečík přímky AC s kružnicí k_1 a Q ($Q \neq B$) průsečík přímky BC s kružnicí k_2. Dokažte, že bod K leží na úsečce PQ.
   [53–A–II–3]

4. *Najděte nejmenší hodnotu zlomku*

$$V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18},$$

kde n je libovolné přirozené číslo větší než 2.

Řešení. Nejprve spočtěme hodnoty výrazu $V(n)$ pro několik přirozených čísel $n \geqq 3$:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$V(n)$	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{7}$	$7\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$	2	$7\frac{5}{9}$	$9\frac{2}{9}$	$10\frac{14}{29}$	$11\frac{13}{21}$	$12\frac{40}{57}$	$13\frac{28}{37}$

Z tabulky vidíme, že $V(n) \geqq 2$ pro všechna $n \in \{3, 4, \ldots, 14\}$, přičemž $V(8) = 2$. Ukážeme, že pro všechna $n \geqq 9$ už platí $V(n) > 2$.

Postupnou úpravou výrazu $V(n) - 2$ dostáváme (víme, že $V(8) - 2 = 0$)

$$V(n) - 2 = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18} - 2 = \frac{n^3 - 12n^2 + 37n - 40}{n^2 - 10n + 18} =$$
$$= \frac{(n-8)(n^2 - 4n + 5)}{(n-5)^2 - 7} = \frac{(n-8)\big((n-2)^2 + 1\big)}{(n-5)^2 - 7}.$$

Pro $n \geqq 9$ jsou čitatel i jmenovatel posledniho zlomku kladná čísla. Je tedy $V(n)-2>0$ pro každé $n \geqq 9$.

Odpověď: Nejmenší hodnota zlomku $V(n)$ je pro všechna přirozená čísla $n > 2$ rovna 2; této hodnoty výraz $V(n)$ nabývá pro $n = 8$.

Jiné řešení. Dělením obou polynomů se zbytkem dostaneme

$$V(n) = n - \frac{n+4}{n^2-10n+18}. \tag{1}$$

Ukážeme, že pro $n \geqq 10$ platí

$$\frac{n+4}{n^2-10n+18} < 1. \tag{2}$$

Pro přirozená čísla $n \geqq 10$ je totiž jmenovatel $n^2-10n+18 = n(n-10)+18$ kladné číslo, a nerovnost (2) je tak ekvivalentní s nerovností $0 < n^2-11n+14 = (n-1)(n-10)+4$, která je pro $n \geqq 10$ zřejmě splněna. Pro přirozená čísla $n \geqq 10$ proto podle (1) platí $V(n) > n-1 \geqq 9$. Jak snadno zjistíme (viz hodnoty v již uvedené tabulce), nabývá výraz $V(n)$ pro přirozená čísla $n \in \{3,4,5,6,7,8,9\}$ menších hodnot, mezi nimiž je nejmenší $V(8) = 2$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Uvažujme výraz
$$V(x) = \frac{5x^4-4x^2+5}{x^4+1}.$$
   a) Dokažte, že pro každé reálné číslo x platí $V(x) \geqq 3$.
   b) Najdete největší hodnotu $V(x)$.
   [58–C–II–1]
2. Určete všechny dvojice (x,y) celých čísel, které jsou řešením nerovnice
$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{y\sqrt{x}} < \frac{5\sqrt{y}}{y}.$$
   [51–C–I–3]

D1. Určete všechna reálná čísla p taková, že pro libovolná kladná čísla x, y platí nerovnost
$$\frac{x^3+py^3}{x+y} \geqq xy.$$
[50–B–II–1]

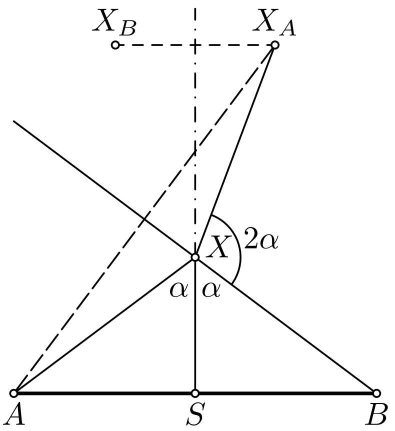
D2. Pro která celá čísla a je maximum i minimum funkce
$$y = \frac{12x^2-12ax}{x^2+36}$$
celé číslo? [48–A–I–3]

5. *V rovině je dána úsečka AB. Pro libovolný bod X této roviny, který je různý od A i B, označme X_A, resp. X_B obraz bodu A, resp. B v osové souměrnosti podle přímky XB, resp. XA. Najděte všechny takové body X, které spolu s body X_A, X_B tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*

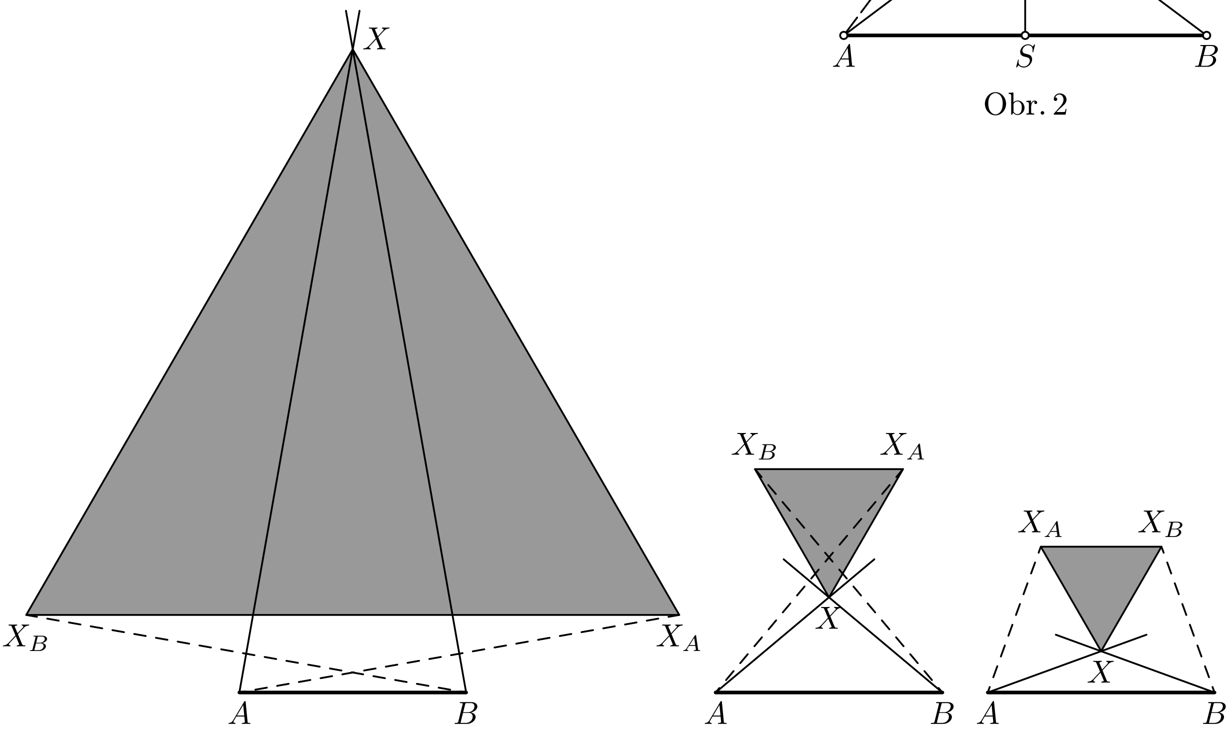
Řešení. Bod X_A je souměrně sdružený s bodem A podle přímky XB, platí tedy $|XX_A| = |XA|$. Podobně platí $|XX_B| = |XB|$. Má-li být trojúhelník XX_AX_B rovnostranný, musí platit $|XX_A| = |XX_B|$ neboli $|XA| = |XX_A| = |XX_B| = |XB|$. Bod X proto nutně leží na ose o úsečky AB. Naopak, leží-li bod X na ose úsečky AB, platí podle rovností z prvních dvou vět řešení $|XX_A| = |XX_B|$. Body X, X_A a X_B pak budou vrcholy rovnostranného trojúhelníku, právě když velikost úhlu X_AXX_B bude 60°.

Hledaný bod X zřejmě nemůže být středem S úsečky AB, protože pak by bylo $X_A = A$, $X_B = B$ a body X_A, X, X_B by ležely na téže přímce. Hledané body X mohou tudíž ležet na přímce o mimo úsečku AB. Vzhledem ke zřejmé symetrii se dále omezíme jen na body X v jedné z polorovin určených přímkou AB.

Označme α velikost ostrého úhlu AXS (obr. 2), který zřejmě může nabývat libovolné hodnoty z intervalu $(0°, 90°)$. Ze shodnosti orientovaných úhlů AXB a BXX_A plyne, že orientovaný úhel SXX_A pak má velikost 3α. Jak už víme, bod X bude vrcholem rovnostranného trojúhelníku XX_AX_B, právě když bude přímka XX_A svírat s osou o úhel $30°$, což vzhledem k nerovnostem $0° < 3\alpha < 270°$ nastane jedině pro $3\alpha \in \{30°, 150°, 210°\}$ neboli $\alpha \in \{10°, 50°, 70°\}$.



Obr. 2



Obr. 3

Na obr. 3 vidíme všechna tři odpovídající řešení. Jsou to vrcholy rovnoramenných trojúhelníků se základnou AB a úhlem $2\alpha \in \{20°, 100°, 140°\}$ při vrcholu X. Další tři řešení (souměrně sdružená podle přímky AB) existují v opačné polorovině určené přímkou AB.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nechť P je vnitřní bod konvexního úhlu BAC. Označme K a M obrazy bodu P v osových souměrnostech podle přímek AB a AC. Určete velikost úhlu KAM. [$|\sphericalangle KAM| = 2|\sphericalangle BAC|$, když je úhel BAC ostrý nebo pravý, $|\sphericalangle KAM| = 360° - 2|\sphericalangle BAC|$, když je úhel BAC tupý.]
2. Nechť P je vnitřní bod ostroúhlého trojúhelníku ABC s daným obsahem S. Označme K, L a M obrazy bodu P v osových souměrnostech podle přímek AB, BC a CA. Vypočtěte obsah šestiúhelníku $AKBLCM$ a zjistěte, kdy je tento šestiúhelník pravidelný. [Obsah je vždy $2S$, šestiúhelník je pravidelný pouze v případě, kdy je trojúhelník ABC rovnostranný a bod P je jeho těžiště.]
3. Nechť P je libovolný vnitřní bod rovnostranného trojúhelníku ABC. Uvažujme obrazy

K, L a M bodu P v osových souměrnostech s osami AB, BC a CA. Určete množinu všech bodů P takových, že trojúhelník KLM je rovnoramenný. [53–C–I–4]

4. Nechť A a B jsou různé body roviny. Dále je dán orientovaný úhel ω ($0° < \omega < 90°$). Pro libovolný bod X označme po řadě X_A, X_B obrazy bodu X v otočeních kolem středů A a B o úhel ω. Určete všechny body X, pro které je trojúhelník XX_AX_B rovnostranný. [48–B–II–4]

D1. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, jehož vnitřní úhel při vrcholu B má velikost $60°$.
   a) Jestliže $|BC| = |CD|$, pak platí $|CD| + |DA| = |AB|$. Dokažte.
   b) Rozhodněte, zda platí opačná implikace.
   [53–A–I–5]

6. *Je dáno přirozené číslo $k < 12$. Ve vrcholech pravidelného dvanáctiúhelníku jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 12$ (jako na ciferníku hodin). V jednom kroku můžeme buď vyměnit některá dvě protilehlá čísla, nebo zvolit libovolných k sousedních vrcholů a v nich napsaná čísla zvětšit o 1. Jako $T(k)$ označme tvrzení, že po konečném počtu kroků lze dostat všech 12 čísel stejných. Dokažte, že $T(2)$ neplatí, $T(5)$ platí, a rozhodněte o platnosti $T(3)$.*

Řešení. Vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníku očíslujme stejně jako na číselníku hodin. Pro $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$ označme a_i číslo napsané v i-tém vrcholu dvanáctiúhelníku; na počátku je podle zadání $a_i = i$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$.

Nejprve ukážeme, že $T(2)$ neplatí. Uvažujme součty

$$S_1 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11},$$
$$S_2 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}.$$

Na počátku je $S_1 = 36$ a $S_2 = 42$. Každá dvě protilehlá čísla se nacházejí společně v témž součtu, to znamená, že po jejich výměně se žádný z obou součtů nezmění. Navíc žádná dvě sousední čísla nepatří do téhož součtu, takže po kroku spočívajícím ve volbě dvou sousedních vrcholů a zvětšení v nich napsaných čísel o 1 se oba součty zvětší o 1, takže jejich rozdíl $S_2 - S_1$ se nezmění. Protože na počátku je $S_2 - S_1 = 6$, nelze nikdy dojít do situace, kdy by byla všechna čísla a_i stejná. V takovém případě by totiž bylo $S_1 = S_2$ a rozdíl $S_2 - S_1$ by byl nulový. Proto tvrzení $T(2)$ neplatí.

Obdobně dokážeme, že neplatí ani tvrzení $T(3)$. Uvažujeme tentokrát tři součty

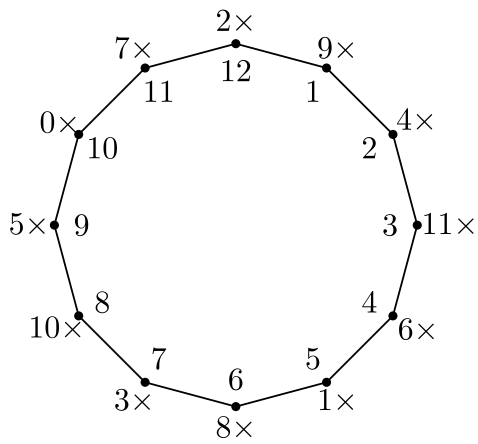
$$S_1 = a_1 + a_4 + a_7 + a_{10},$$
$$S_2 = a_2 + a_5 + a_8 + a_{11},$$
$$S_3 = a_3 + a_6 + a_9 + a_{12},$$

pro které na počátku platí $S_1 = 22$, $S_2 = 26$, $S_3 = 30$. Po každém kroku se buď žádný ze tří součtů nezmění (vyměníme-li dvojici protilehlých čísel), nebo se všechny tři zvětší o 1 (zvětšíme-li trojici sousedních čísel). Proto po žádném počtu kroků nemohou být u všech vrcholů napsána stejná čísla, pak by totiž platilo $S_1 = S_2 = S_3$.

Nakonec ukážeme, že tvrzení $T(5)$ platí. Pěticí čísel se středem ve vrcholu i budeme rozumět čísla ve vrcholech $i-2$, $i-1$, i, $i+1$, $i+2$ s obvyklou úmluvou, že vrchol -1 je vrchol 11, vrchol 0 je 12, vrchol 13 je 1 a vrchol 14 je 2. Zvětšeme pětice se středy v jednotlivých vrcholech tolikrát, jak je naznačeno v obr. 4, tj. pětici se středem ve vrcholu 1 zvětšíme devětkrát, pětici se středem ve vrcholu 2 čtyřikrát, pětici se středem ve vrcholu 3 jedenáctkrát atd. až pětici se středem ve vrcholu 12 dvakrát. Číslo u vrcholu 1 je na počátku 1 a zvětší se pouze při zvětšení pětic se středy v bodech 11, 12, 1, 2 a 3.

Po těchto krocích bude tedy $a_1 = 1 + 7 + 2 + 9 + 4 + 11 = 34$, podobně se zvětší i čísla u dalších vrcholů a bude platit

$$\begin{aligned}
a_2 &= 2 + 2 + 9 + 4 + 11 + 6 = 34,\\
a_3 &= 3 + 9 + 4 + 11 + 6 + 1 = 34,\\
a_4 &= 4 + 4 + 11 + 6 + 1 + 8 = 34,\\
a_5 &= 5 + 11 + 6 + 1 + 8 + 3 = 34,\\
a_6 &= 6 + 6 + 1 + 8 + 3 + 10 = 34,\\
a_7 &= 7 + 1 + 8 + 3 + 10 + 5 = 34,\\
a_8 &= 8 + 8 + 3 + 10 + 5 + 0 = 34,\\
a_9 &= 9 + 3 + 10 + 5 + 0 + 7 = 34,\\
a_{10} &= 10 + 10 + 5 + 0 + 7 + 2 = 34,\\
a_{11} &= 11 + 5 + 0 + 7 + 2 + 9 = 34,\\
a_{12} &= 12 + 0 + 7 + 2 + 9 + 4 = 34.
\end{aligned}$$



Obr. 4

Vidíme, že po popsaných krocích (ty spočívaly jen ve zvětšení pětice sousedních čísel, výměnu protilehlých čísel jsme nevyužili) bude u každého vrcholu dvanáctiúhelníku napsáno shodné číslo 34.

Poznámka. Ukažme, jak dokázat tvrzení $T(5)$ systematičtěji, i když zdaleka ne tak efektivně. Zvětšíme-li pětkrát čísla v po sobě následujících pěticích vrcholů, tedy postupně v pěticích vrcholů

$$(1,2,3,4,5),\quad (6,7,8,9,10),\quad (11,12,1,2,3),\quad (4,5,6,7,8),\quad (9,10,11,12,1),$$

dosáhneme díky rovnosti $5\cdot 5 = 2\cdot 12+1$ toho, že čísla ve všech vrcholech s výjimkou prvního zvětšíme o 2, zatímco číslo v prvním vrcholu zvětšíme o 3. Podobně ovšem můžeme zvětšit číslo v libovolném vrcholu o jedna více než ve všech ostatních vrcholech, takže opakováním uvedeného postupu jedenáctkrát pro vrchol 1, desetkrát pro vrchol 2, … a konečně jednou pro vrchol 11 dosáhneme toho, že čísla ve všech vrcholech budou stejná. Dodejme, že analogickým postupem lze díky rovnostem $7 \cdot 7 = 4 \cdot 12 + 1$ a $11\cdot 11 = 10\cdot 12+1$ dokázat i tvrzení $T(7)$ a $T(11)$, ne však žádné tvrzení $T(k)$ s číslem k soudělným s číslem 12.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Na tabuli jsou napsána celá nezáporná čísla od 0 do 1 234. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla a místo nich na tabuli napíšeme jejich rozdíl (od většího čísla odečteme menší). Tuto operaci opakujeme, dokud na tabuli nezůstane poslední číslo. Může na tabuli zůstat číslo 2? [Ne. Uvedenou operací se nemění parita součtu všech čísel napsaných na tabuli, která je na počátku lichá.]
2. Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 100. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla a místo nich napíšeme na tabuli jejich součet. Tuto operaci opakujeme, dokud na tabuli nezůstanou poslední tři čísla. Můžeme tímto způsobem nakonec získat tři po sobě jdoucí čísla? [Součet tří po sobě jdoucích čísel je dělitelný třemi, kdežto neměnný součet všech čísel na tabuli dělitelný třemi není.]
3. Na stole je n pohárů, všechny jsou postaveny dnem vzhůru. V jednom kroku smíme otočit libovolných k pohárů naopak (k je pevně dáno). Je možné, aby po konečném počtu kroků bylo všech n pohárů postaveno dnem dolů? Řešte nejprve pro $n = 9$ a $k = 5$, potom pro $n = 9$ a $k = 4$. [Pro $n = 9$ a $k = 5$ to zřejmě možné je. Pro $n = 9$ a $k = 4$ to možné není, protože obecněji platí: při sudém k a libovolném n se nemění

parita počtu pohárů postavených dnem vzhůru (tj. tento počet je buď pořád sudý, nebo pořád lichý).]

4. Na hranici kruhu stojí 2 jedničky a 48 nul v pořadí $1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0$. V jednom kroku je povoleno přičíst číslo 1 ke kterýmkoliv dvěma sousedním číslům. Můžeme po několika krocích dosáhnout toho, aby všech 50 čísel bylo stejných? [Není to možné; označte čísla po řadě $x_1, x_2, \dots, x_{50}$ a vysvětlete, proč výraz $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{49} - x_{50}$ nemění svou hodnotu (nezapomeňte, že spolu sousedí i x_1 a x_{50}).]

D1. Je dáno n ($n \geqq 2$) přirozených čísel, s nimiž můžeme provést následující operaci: vybereme několik z nich, ale ne všechna a nahradíme je jejich aritmetickým průměrem. Zjistěte, zda je možno pro libovolnou počáteční n-tici dostat po konečném počtu kroků všechna čísla stejná, jestliže n se rovná a) 2 000, b) 35, c) 3, d) 17. [51–B–I–4]

D2. Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na počátku, aby po konečném počtu vhodných kroků byla na všech stěnách krychle stejná čísla. [60–A–I–5]

D3. V každém vrcholu pravidelného 2008úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout:
   a) na 8 hromádek po 251 minci,
   b) na 251 hromádek po 8 mincích.

   [58–A–I–5]

D4. Krokem budeme rozumět nahrazení uspořádané trojice celých čísel (p, q, r) trojicí $(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. Rozhodněte, zda existuje celé číslo k takové, že z trojice $(1, 3, 7)$ vznikne po konečném počtu kroků trojice $(k, k + 1, k + 2)$. [52–B–I–4]

D5. Je dáno n nezáporných čísel. Můžeme vybrat libovolná dvě z nich, řekněme a a b, $a \leqq b$, a zaměnit je čísly 0 a $b - a$. Dokažte, že opakováním této operace lze všechna daná čísla změnit na nuly, právě když původní čísla lze rozdělit do dvou skupin tak, že součty čísel v obou skupinách jsou stejné. [51–B–II–4]